Singular perturbation theory를 이해해 보자

심형보 (서울대학교 전기정보공학부)

실제 시스템은 높은 차수의 미분방정식으로 표현되지만 이를 제어하기 위하여 작은 차수를 가진 모델이 필요할 때, 축소차수 모델(reduced-order model)은 어떻게 얻는 것일까? 고이득 궤환(high-gain feedback)을 통한 제어기 설계를 많이 보았는데, 이런 제어기를 포함한 폐루프 시스템은 어떻게 해석하는 것일까? 빠르게 동작하는 동력학과 느리게 동작하는 동력학이 공존하는 시스템은 간편한 해석법이 존재한다는데, 그것은 무엇일까? 이런 종류의 질문에 답하고 싶거나 답해야 한다면, 이번 호의 내용에 귀 기울여 보자.

1. 서론

제어이론 공부나 연구를 하다보면 singular perturbation 이론이 자주 등장하곤 한다. 하지만 이 내용은 보통 대학원의 비선형시스템이론 수업에 등장하다 보니 쉽게 접근할 기회가 없었을 수도 있다. 사실 이 이론은 비선형 시스템 뿐 아니라 선형 시스템의 제어와 해석에도 유용하게 사용될 수 있는 중요한 이론이기에, 본 편에서 선형 시스템을 기반으로 이 이론의 핵심을 파악해 본다.

우선, 다음 시스템의 거동을 예상해 보자.

$$\dot{x}(t) = -z(t), \qquad x(0) = -1, \tag{1a}$$
$$\dot{z}(t) = -1000(z(t) - x(t)), \qquad z(0) = 1. \tag{1b}$$

시작 시간 $t = 0$에서 $\dot{x}(0) = -z(0) = -1$이고 $\dot{z}(0) = -2000$이다. 미분값이 이렇게 큰 차이를 보이니, 시작부터 $z(t)$는 $x(t)$에 비해 빠른 변화가 예상된다. 이러한 경향은 $\dot{z}(t)$의 우변의 절대값이 $\dot{x}(t)$의 우변 절대값보다 큰 값을 유지하는 한 계속될 것이다. 이제 이 기간동안 느리게 변하는 $x(t)$를 극단적으로 초깃값 $x(0)$와 같은 값을 갖는 상수라고 한번 생각해 보자. 그러면, 식 (1b)는 상수 입력 $x(0)$를 갖는 안정한 선형 시스템이라 생각할 수 있고, $z(t)$는 0초에서 초깃값 1로부터 출발하여 $z(t) = x(0)$이 될 때까지 빠르게 변할 것을 알 수 있다. 물론, $z(t)$가 $x(0)$와 비슷한 값을 가질 때쯤이면, (1b)의 우변도 0에 가까운 값을 갖게 되어 $z(t)$의 변화 속도가 $x(t)$의 변화 속도와 별반 차이가 없어지겠지만, 식 (1b)로부터 $|z(t) - x(t)|$가 커질 때마다 $z(t)$는 느리게 변하는 $x(t)$ 근처로 빠르게 수렴하려 한다는 것을 알 수 있겠다.

그렇다면, 그냥 극단적으로

$$z(t) = x(t), \qquad \forall t > 0 \tag{2a}$$

이라고 주장해 보면 어떨까? 이 주장에 따르면, 식 (1a)은

$$\dot{x}(t) = -x(t), \qquad x(0) = -1 \tag{2b}$$

이 되고, 해는 $x(t) = -e^{-t}$가 됨을 알 수 있다. 그리고 물론 $z(t) = x(t)$라고 했으니, $z(t) = -e^{-t}$가 될 것이고. 이 극단적 주장이 말이 되는지 시뮬레이션 결과인 Fig. 1을 보자. Fig. 1에 의하면, $z(0) = 1$임에도 불구하고 시뮬레이션 결과는 $z(0) = -1$인 것처럼 보인다. 사실은 $z(t)$가 매우 빠르게 1에서 -1까지 이동한 뒤에 $x(t)$의 속도에 맞춰 $z(t) = x(t)$를 유지하며 천천히 움직인 것이다. 또한, 함수 $-e^{-t}$를 그려보면 이 두 그림과 거의 구별할 수 없다.

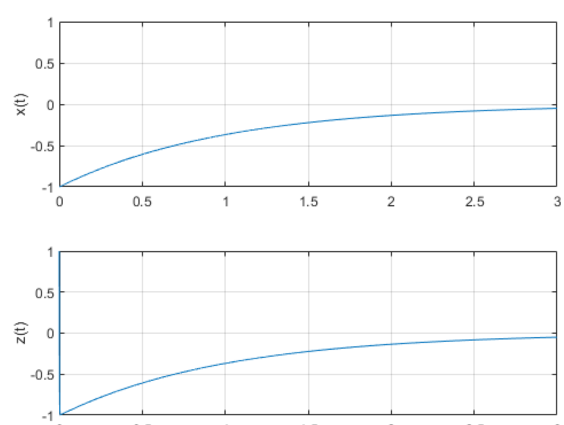

Fig. 1. 시스템 (1)을 시뮬레이션 한 결과 (위: $x(t)$, 아래: $z(t)$). $z(0) = 1$임에도 불구하고 시뮬레이션 결과는 $z(0) = -1$인 것처럼 보이지만, 사실은 매우 빠르게 $z(t)$가 1에서 -1까지 이동한 뒤 마치 $z(t) = x(t)$인 것처럼 동작한다.

그렇다면, 식 (1)과 같이 주어진 시스템, 즉, 한 시스템 속에 빠른 동력학과 느린 동력학이 공존하고, 빠른 동력

학이 안정한 시스템이라면, 굳이 전체 시스템인 (1)을 해석할 것이 아니라, 작은 차수의 식 (2)를 사용해도 거의 같은 결과를 얻을 수 있다는 말이 된다. 바로 이것이 singular perturbation theory의 핵심이라 할 수 있다.

식 (1)에서 $1/1000$을 작은 수를 대표하는 기호 ε이라고 정의한다면,

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{z}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -1\\ \frac{1}{\varepsilon} & -\frac{1}{\varepsilon}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ z\end{bmatrix} \tag{3}$$

라고 쓸 수 있다. 그런데, 이 시스템은 빠른 부분과 느린 부분을 동시에 갖고 있으니 이 시스템 행렬의 고유치(eigenvalue)에도 그런 사실이 반영되지 않을까? 실제 고유치를 구해보면,

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}$$

이고, Taylor 급수 전개 $\sqrt{1-4\varepsilon} = 1 - 2\varepsilon + \cdots$를 통해,

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{-1+1-2\varepsilon+\cdots}{2\varepsilon} = -1 + O(\varepsilon)\\ \lambda_2 &= \frac{-1-1+2\varepsilon+\cdots}{2\varepsilon} = -\frac{1}{\varepsilon} + 1 + O(\varepsilon)\end{aligned} \tag{4}$$

임을 알 수 있다. (여기서 $O(\varepsilon)$은 ε에 대해 1차 이상의 고차항을 대표하는 기호이다. 따라서, $\lim_{\varepsilon\to 0}|O(\varepsilon)/\varepsilon|$는 유한하다.) ε이 점점 작아지면, 하나의 고유치는 $-\infty$를 향해 가고 나머지 하나는 -1 부근에 머물러 있게 된다. 즉, 2차 시스템 안에, ε이 점점 작아짐에 따라, 안정하고 점점 빨라지는 1차 부시스템(sub-system)이 존재하고, 안정하면서 ε의 변화에 크게 상관없이 빠르지 않게 남아있는 또다른 1차 부시스템이 존재한다고 해석할 수 있다.

2. 본론

2.1. Singular perturbation 표준형

이제 singular perturbation 이론을 이해할 준비가 되었다. 이 이론은 보통 아래와 같은 singular perturbation 표준형에서 출발한다.

$$\dot{x} = A_{11}(\varepsilon)x + A_{12}(\varepsilon)z + B_1(\varepsilon)u + \delta_1(\varepsilon) \tag{5a}$$

$$\varepsilon\dot{z} = A_{21}(\varepsilon)x + A_{22}(\varepsilon)z + B_2(\varepsilon)u + \delta_2(\varepsilon) \tag{5b}$$

여기서 $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^m$라 하고, $0 < \varepsilon \ll 1$을 만족한다. 또한, $u \in \mathbb{R}^p$는 외부 입력을 의미하며 시간 t에 대한 유계의(bounded) 함수 $u(t)$라 생각하자. 우변에 나오는 행렬과 벡터는 모두 ε에 대해 연속이라 하고 $\varepsilon = 0$일 때도 잘 정의된다고 가정하자. 우변이 ε에 의존하게 한 것은 일반화를 위한 것이며, singular perturbation을 처음으로 이해하기 위해서는 우변의 A_{11}이나 δ_1 같은 것들이 모두 ε에 무관한 상수 행렬과 상수 벡터라 생각해도 좋다. 한편, 작은 양수 ε에 대해 (5b)의 양변을 ε으로 나누고 나면, $z(t)$의 변화속도가 $x(t)$의 변화속도보다 대체로 빠르다는 것을 알 수 있을 것이다. 따라서, 표준형 (5)로 시스템이 주어졌을 때, 상태변수 $x(t)$를 '느린 변수(slow variable)', $z(t)$를 '빠른 변수(fast variable)'라 부른다.

식 (5b)의 좌변에 ε이 위치한 것을 너무 이상하게 생각할 필요는 없다. 물론 ε은 0이 아니므로 양변을 ε으로 나누어 표기해도 된다. 하지만, 우리는 앞으로 ε이 점점 작아짐에 따라 시스템의 빠른 부시스템이 더욱 빨라지는 현상을 근사적으로 간편히 살펴보기 위해 아예 극단적으로 빠른, $\varepsilon = 0$인 경우를 생각해 보고자 하는데, ε이 분수의 분모에 나오면 곤란하기 때문에 식 (5b)와 같이 표기한 것 뿐이다.

그런데, 이렇게 매우 작은 ε의 경우를 근사하기 위해 ε에 0을 대입하게 되면, 식 (5b)는 미분방정식이 아닌 z에 대한 일반 방정식으로 볼 수 있고 이 경우 시스템 (5)의 차수가 줄어들게 된다. 이와 같이 시스템 차수가 바뀌는 (ε의) perturbation을 살펴본다는 의미에서 'singular perturbation'이란 이름이 유래되었다. (식 (5)의 우변 역시 ε의 영향을 받지만 $\varepsilon > 0$인 경우와 $\varepsilon = 0$인 경우를 비교해 보아도 시스템 차수 혹은 시스템 성질에 큰 변화는 없다.[1] 이와 같은 미분방정식 우변의 perturbation을 regular perturbation이라 한다.)

2.2. Quasi-steady-state와 boundary-layer subsystem

이제 빠른 변수를 지배하는 방정식이 안정하다고 하자. 즉, $A_{22}(0)$가 Hurwitz 행렬이라 가정하자. (행렬 A_{22}가 ε에 대해 연속이므로, $A_{22}(0)$이 Hurwitz라 가정하면 충분히 작은 ε에 대해서 $A_{22}(\varepsilon)$ 역시 Hurwitz가 된다.) 만일 ε이 충분히 작아, 즉, $z(t)$-동력학 (5b)가 충분히 빨라 상태변수 $x(t)$와 주어진 입력 $u(t)$를 고정된 상수로 생각할 수 있다면, 식 (5b)에서 $z(t)$가 수렴할 평형점은 좌변을 0으로 놓음으로써 쉽게 계산할 수 있다. 이 평형점을 $z^*(t)$라고 하면, ($A_{22}(0)$은 Hurwitz이므로 역행렬이 존재하여)

$$z^*(t) = -A_{22}^{-1}(0)(A_{21}(0)x(t) + B_2(0)u(t) + \delta_2(0)) \tag{6}$$

이 되며, $z(t)$는 초깃값 $z(0)$로부터 $z^*(t)$까지 빠르게 수렴한 뒤 $z(t) \approx z^*(t)$, $t > 0$을 계속 만족하게 될 것이라고 예상해 볼 수 있다. 식 (6)에서 ε을 0으로 둔 이유는 충분히

[1] 일반적으로 시스템 $\dot{x} = f(x,\varepsilon)$의 f가 smooth이고 안정하다면, ε이 충분히 작을 때나 0일 때의 해는 큰 차이가 없다 [1, Chap. 3.2, Chap. 9.4].

작은 $\varepsilon > 0$의 경우나 $\varepsilon = 0$인 경우나 큰 차이가 없기 때문이며, 우리의 목표가 시스템 (5)의 근사에 있기 때문에 근사의 대상을 특정하기 위해 $\varepsilon = 0$으로 했다고 이해할 수 있다. 같은 생각에서 식 (5a)에도 ε에 0을 넣은 뒤 식 (6)을 사용하면

$$\begin{aligned}\dot{x} = (A_{11}(0) - A_{12}(0)A_{22}^{-1}(0)A_{21}(0))x \\ + (B_1(0) - A_{12}(0)A_{22}^{-1}(0)B_2(0))u \\ + (\delta_1(0) - A_{12}(0)A_{22}^{-1}(0)\delta_2(0))\end{aligned} \tag{7}$$

과 같이 될 것이다. 시스템 (7)을 시스템 (5)의 'quasi-steady-state subsystem'이라 부르는데, 그 이유는 $z(t)$가 진짜가 아닌 가짜 평형상태(quasi-steady-state)인 (6)을 유지한다는 가설 하에 만들어진 시스템이란 뜻이다.

지금까지 $z(t)$는 자신의 초깃값 $z(0)$로부터 $z^*(t)$로 빠르게 수렴한다고 하였고, 이 속도는 ε이 작아짐에 따라 점점 빠르게 수렴할 것이라 하였다. 그런데, 이 과정을 좀더 자세히 들여다 보고 싶으면 어떻게 할까? 표준 시간 t의 척도에서 이 과정이 매우 빨라 잘 보이지 않는다면, 이 척도를 늘린 새로운 척도를 도입하면 되지 않을까? 새로운 시간 척도

$$\tau := \frac{t}{\varepsilon}$$

를 도입하면, t가 조금 증가할 때 τ는 많이 증가하게 된다. 이를 이용하면,

$$\begin{aligned}\varepsilon\frac{dz(t)}{dt} = \frac{dz(t)}{d(t/\varepsilon)} = \frac{dz(\varepsilon\tau)}{d\tau} \\ = A_{21}(\varepsilon)x(\varepsilon\tau) + A_{22}(\varepsilon)z(\varepsilon\tau) + B_2(\varepsilon)u(\varepsilon\tau) + \delta_2(\varepsilon)\end{aligned}$$

이 된다. 또한, 빠르게 변하는 $z(t)$를 천천히 보기 위하여

$$\bar{z}(\tau) := z(\varepsilon\tau)$$

라고 정의하면,

$$\frac{d\bar{z}(\tau)}{d\tau} = A_{22}(\varepsilon)\bar{z}(\tau) + A_{21}(\varepsilon)x(\varepsilon\tau) + B_2(\varepsilon)u(\varepsilon\tau) + \delta_2(\varepsilon)$$

가 된다. 이는 실제 시스템의 거동 중 빠른 동력학의 거동을 새로운 시간 척도에서 살펴본 것에 불과하다. 그런데, 이 동력학이 매우 빠르다면, 아예 윗 식의 ε에 극단적인 값 $\varepsilon = 0$을 대입하여 빠른 동력학의 거동을 근사해 볼 수 있다. 즉, 아래 식을 얻는 것인데

$$\frac{d\bar{z}(\tau)}{d\tau} = A_{22}(0)\bar{z}(\tau) + A_{21}(0)x(0) + B_2(0)u(0) + \delta_2(0) \tag{8}$$

이 식의 장점은 빠른 변수를 제외한 다른 변수들이 변하지 않고 상수로 머물러 있다는 점이다. 한편, 시스템 (8)을 시스템 (5)의 'boundary-layer subsystem'이라 부른다. Boundary-layer subsystem을 통해 볼 수 있는 것은 시스템 (5)의 빠른 변수 $z(t)$가 초깃값 $z(0)$로부터 $z^*(t)$로 수렴해 가는 과정이다. 행렬 $A_{22}(0)$의 고유치에 따라 $z(t)$가 $z^*(t)$를 향해 진동없이 수렴할지, 진동한다면 주파수는 얼마일지, 고유벡터의 방향에 따라 어느 방향으로는 더 빠르게 혹은 더 느리게 수렴할지 등 많은 정보를 알 수 있게된다.

예제 1: 다음 식은 전기자를 제어하는 직류 모터의 모델식이다.

$$J\frac{d\omega}{dt} = ki \tag{9a}$$

$$L\frac{di}{dt} = -k\omega - Ri + u \tag{9b}$$

여기서 전기자의 전류, 전압, 저항과 인덕턴스를 각각 i, u, R, L로 표기하였고, 모터의 관성모멘트와 회전속도를 J와 ω로 표기하였다. 모터의 토크는 ki항으로 표현되었고 역기전력은 $k\omega$항으로 나타난다. 한편 전기자 식 (9b)는 관성에 관한 기계식 (9a)보다 상대적으로 빠르며, 이는 보통 작은 L의 값으로 나타난다. 따라서 인덕턴스 L을 singular perturbation 파라메터 ε이라 보고, L이 충분히 작은 시스템에 대하여, quasi-steady-state subsystem과 boundary-layer subsystem을 구해 보자.

우선 $\varepsilon = L = 0$이라 놓아

$$i^* = \frac{u - k\omega}{R} \tag{10}$$

을 얻고, 이로부터 위 모터 시스템의 quasi-steady-state subsystem

$$J\frac{d\omega}{dt} = -\frac{k^2}{R}\omega + \frac{k}{R}u \tag{11}$$

을 얻을 수 있다. 또한, boundary-layer subsystem은

$$\frac{d\bar{i}}{d\tau} = -R\bar{i} - k\omega(0) + u(0) \tag{12}$$

가 된다. □

2.3. Tikhonov 정리

앞에서의 논의에 따르면 시스템 (5)의 해는 ε이 충분히 작을 때 quasi-steady-state subsystem (7)의 해와 식 (6)을 통해 얻은 해로 근사할 수 있다고 주장하였다. 이는 Tikhonov 정리를 통해 정당화되는데, 이를 살펴보기 위해 ε에 의존하는 시스템 (5)의 해를 $x(t,\varepsilon)$과 $z(t,\varepsilon)$로, quasi-steady-state subsystem (7)의 해를 $x_{\mathrm{qss}}(t)$로 표기하자. 또한, $x_{\mathrm{qss}}(t)$로부터 식 (6)를 통해 얻은 $z^*(t)$를 $z_{\mathrm{qss}}(t)$라고 하고, boundary-layer subsystem (8)의 해를 $\bar{z}_{\mathrm{bl}}(\tau)$라

하자.

Tikhonov 정리: ε이 충분히 작다고 하자. Boundary-layer subsystem이 안정할 때 (즉, $A_{22}(0)$가 Hurwitz), 주어진 $\hat{t}$와 T $(0 < \hat{t} < T)$에 대하여 다음이 성립한다.

- $x(t,\varepsilon) - x_{\text{qss}}(t) = O(\varepsilon), \forall t \in [0,T]$,
- $z(t,\varepsilon) - z_{\text{qss}}(t) = O(\varepsilon), \forall t \in [\hat{t},T]$,
- $z(t,\varepsilon) - \bar{z}_{\text{bl}}(t/\varepsilon) = O(\varepsilon), \forall t \in [0,\hat{t}]$.

만약 quasi-steady-state subsystem (7) 또한 안정하다면 (즉, $A_{11}(0) - A_{12}(0)A_{22}^{-1}(0)A_{21}(0)$이 Hurwitz), 위 내용은 $T = \infty$에 대해서도 성립한다. □

위 정리에서 알 수 있는 바와 같이, $x_{\text{qss}}(t)$는 실제 시스템의 느린변수 $x(t)$를 초깃값 $x(0)$부터 근사할 수 있다. 하지만, $z_{\text{qss}}(t)$의 값은 $x_{\text{qss}}(t)$로부터 식 (6)을 통해 정해지는 것으로, $z_{\text{qss}}(0)$는 일반적으로 $z(0)$와 같지 않을 것이다. 때문에 $z_{\text{qss}}(t)$가 실제 시스템의 $z(t)$를 근사하는 것은 $\hat{t}$ 시간 이후에만 가능한 것이고, 처음부터 $\hat{t}$ 시간까지의 근사는 $z_{\text{qss}}(t)$가 아닌 boundary-layer subsystem의 해 $\bar{z}_{\text{bl}}$을 통해서 이루어짐을 알 수 있다.

이 정리는 증명은 [1–3]을 참조하기 바란다.

2.4. 모델 간략화를 어떻게 하는 것일까?

이상의 논의에서 모델 간략화가 어떻게 수행될 지 명확해졌으리라 믿는다. 실제 시스템 (5) 대신 quasi-steady-state subsystem (7)이 바로 (5)의 축소차수 모델이 되는 것이다.

예제 1의 모터 시스템의 경우, 2차 시스템인 (9) 대신 1차 시스템 (11)이 모터 시스템의 간략한 모델이 되는 셈인데, 이는 널리 알려진 사실과도 부합한다.

2.5. Unmodeled dynamics란 무엇인가?

현실 세계에서 고차 미분방정식으로 주어진 복잡한 모델이 있는 경우, 전술한 방법으로 저차 시스템 모델을 구한 뒤 이를 바탕으로 제어기를 설계하는 것도 물론 가능하지만, 거꾸로 우리가 제어기를 설계하기 위해 만든 시스템 모델이 식 (7)에 해당하고, 실제 시스템은 (알 수는 없지만) 더 복잡한 고차 방정식 (5)로 주어졌다고 생각해 볼 수도 있다. 이와 같이, 생략되었다고 생각하는 미지의 추가적인 동력학을 보통 unmodeled dynamics라 부른다.

우리가 어떤 제어기를 설계할 때, 제어신호에 고주파 성분이 포함될 경우 unmodeled dynamics가 야기되어 성능이 저하되거나 불안정해 질지 모른다라고 말하는 이유는, 앞서 살펴본 바와 같이 생략된 unmodeled dynamics는 보통 안정하고 빠른 동력학이기 때문이다. 즉, 입력의 고주파 성분이 일부 상태변수를 빠르게 만들 수 있기 때문에, 빠른 동력학에 나타나는 느린 변수를 상수로 가정한 뒤 얻은 quasi-steady-state 식 (6)이 더 이상 유효하지 않게 되기 때문이다.

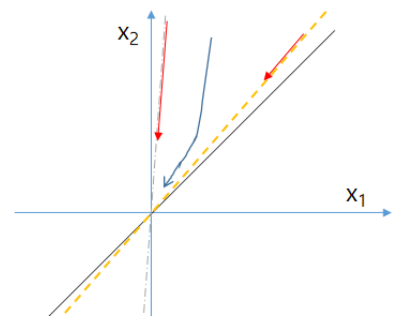

Fig. 2. 시스템의 해(blue curved)는 빠르게 불변 부분공간(yellow dotted)로 수렴하며, 불변 부분공간 위에서의 동력학(quasi-steady-state dynamics)의 해(short red arrow)와 유사하게 행동한다. 집합 $\mathscr{M}$은 실선(black)으로 표시되어 있고, 시스템의 또 다른 고유공간(eigenspace)는 푸른색(dash-dot)으로 나타나 있다.

2.6. 기하학적으로 이해해 보자

시스템 (5)가 입력을 갖지 않거나, 이미 페루프 시스템을 표현하여 입력 u가 명시적으로 나타나지 않고, δ_i도 없다고 하자. 이 경우, 앞선 논의를 기하학적으로 이해할 수 있다. 상태공간 $\mathbb{R}^{n+m}$에 속한 집합

$$\mathscr{M} = \{(x,z) : z = -A_{22}^{-1}(0)A_{21}(0)x\}$$

를 생각하자. 그러면 Tikhonov 정리가 말하는 것은, ε이 충분히 작을 때 $\mathbb{R}^{n+m}$ 상의 임의의 초깃값 $(x(0),z(0))$로부터 출발한 시스템 (5)의 해는 빠르게 집합 $\mathscr{M}$ 근처로 수렴하여 $\mathscr{M}$ 부근에 머문다는 것이다. 또한, 시스템 (5)의 해가 $\mathscr{M}$ 부근에 머문다는 것은, 시스템 (5a)가 quasi-steady-state subsystem처럼 행동한다는 것이기도 하다. 여기서 $\mathscr{M}$ "부근"이라 한 이유는, 실제로는 ε이 0이 아니기 때문이다. ε이 0은 아니지만 충분히 작은 경우 $\mathscr{M}$ 대신 $\mathscr{M}$ 부근에 시스템 (5)의 불변 부분공간(invariant subspace)[2]이 존재하고, 시스템 (5)의 해는 그 불변 부분공간으로 수렴하는데, 해당 불변 부분공간 위에서 시스템 (5)의 거동을 quasi-steady-state subsystem이 근사하는 것이다. 이 불변 부분공간을 "slow manifold"라 한다 (manifold란 용어는 비선형 시스템을 위해서 나온 말이고, 우리는 선형 시스템만 다루고 있기 때문에 manifold 대신 subspace라고 생각하면 된다).

정말 그런가? 서론에서 살펴본 시스템 (3)의 경우,

[2]불변 부분공간이란 시스템 (5)의 초깃값이 그 부분공간에 놓여 있을 때 시스템의 해가 그 부분공간을 벗어나지 않는다는 뜻이다.

$\mathcal{M} = \{(x,z) : z = x\}$을 가지는데 이는 $\varepsilon = 0$의 경우에 해당하는 것이고, $\varepsilon > 0$인 경우에는 식 (4)의 느린 고유치 λ_1에 해당하는 고유공간(eigenspace)

$$\text{span}\begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{1-4\varepsilon}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

이 해당 불변 부분공간이 된다. (선형시스템 지식을 사용해서 phase portrait를 그려 확인해 보자!) 이 불변 부분공간이 $\varepsilon \to 0$이 되면 집합 $\mathcal{M}$이 된다는 사실도 확인해 볼 수 있다. (Fig. 2 참조)

2.7. 안정도 해석에서 singular perturbation 활용

본 절에서는 시스템 (5)에서 입력 u와 δ_1, δ_2가 없다고 생각하자. 또한, 간단히 살펴보기 위해 시스템 (5) 우변에 나오는 모든 행렬이 ε에 의존하지 않는 상수 행렬이라 하자. 이제 주장하는 바는, 만일 boundary-layer subsystem (8)과 quasi-steady-state subsystem (7)이 모두 안정하면, 원래 시스템 (5)가 충분히 작은 ε에 대하여 안정하다는 것이다. (선형 시스템에서는 시스템 (5)의 안정도를 직접 따져보는 것이 어렵지 않겠지만, 비선형 시스템의 경우 조금이라도 차수가 작은 두 개의 시스템, 즉 boundary-layer subsystem과 quasi-steady-state subsystem의 안정도를 각각 따지는 것이 용이한 경우가 많다.) 이를 보이기 위해, 식 (6)을 참조하여 $h(x) := -A_{22}^{-1}A_{21}x$라 정의한 뒤,

$$y := z - h(x)$$

를 이용해 (x,z)로부터 (x,y)로 시스템 (5)의 좌표변환를 구해 보자. (y는 빠른 변수 z와 앞 절에서 살펴본 z^*와의 차이를 의미한다.)

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})x + A_{12}y \\
\varepsilon\dot{y} &= A_{21}x + A_{22}(y + h(x)) - \varepsilon\frac{\partial h}{\partial x}\dot{x} \\
&= A_{22}y + \varepsilon A_{22}^{-1}A_{21}[(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})x + A_{12}y] \\
&= (A_{22} + \varepsilon A_{22}^{-1}A_{21}A_{12})y + \varepsilon A_{22}^{-1}A_{21}(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})x
\end{aligned}$$

이제 가정으로부터 A_{22}와 $A_s := (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})$가 Hurwitz임을 알 수 있고, 따라서

$$P_sA_s + A_s^TP_s = -I, \qquad P_fA_{22} + A_{22}^TP_f = -I$$

를 만족하는 $P_s = P_s^T > 0$와 $P_f = P_f^T > 0$가 유일하게 존재한다.

한편, 간략한 전개를 위해서 $m_1 := \|P_sA_{12}\|$, $m_2 := \|P_fA_{22}^{-1}A_{21}A_s\|$, $m_3 := \|P_fA_{22}^{-1}A_{21}A_{12}\|$라 하자. 이제 Lyapunov 함수를 $V(x,y) = \frac{m_2}{2}x^TP_sx + \frac{m_1}{2}y^TP_fy$라고 하면,

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \frac{m_2}{2}\left[x^T(P_sA_s + A_s^TP_s)x + 2x^TP_sA_{12}y\right] \\
&\quad + \frac{m_1}{2\varepsilon}\Big[y^T(P_fA_{22} + A_{22}^TP_f)y \\
&\quad + 2\varepsilon y^TP_fA_{22}^{-1}A_{21}A_{12}y + 2\varepsilon y^TP_fA_{22}^{-1}A_{21}A_sx\Big] \\
&\le -\frac{m_2}{2}\|x\|^2 + m_2\|P_sA_{12}\|\|x\|\|y\| - \frac{m_1}{2\varepsilon}\|y\|^2 \\
&\quad + m_1\|P_fA_{22}^{-1}A_{21}A_{12}\|\|y\|^2 + m_1\|P_fA_{22}^{-1}A_{21}A_s\|\|y\|\|x\| \\
&\le -\begin{bmatrix}\|x\| \\ \|y\|\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\frac{m_2}{2} & -m_1m_2 \\ -m_1m_2 & m_1\left(\frac{1}{2\varepsilon} - m_3\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\|x\| \\ \|y\|\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

우변의 행렬은

$$\varepsilon < \frac{1}{4m_1m_2 + 2m_3}$$

일때 양정의(positive definite) 행렬이므로, 이 경우 $(x,y) \neq (0,0)$일 때 $\dot{V} < 0$이 성립하여 안정도가 증명된다. 예상대로 충분히 작은 ε에 대해 시스템 (5)가 안정함을 보였다.

2.8. 제어기 설계에서 singular perturbation 활용

Singular perturbation 이론은 고이득 궤환 제어기를 사용한 경우 폐루프 시스템의 안정도나 성능을 분석할 때 주로 사용된다. 본 절에서는 간단히 예를 들어 살펴보고자 한다.

불확실한 상수 a와 δ를 가진 어떤 시스템

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= ax_2 + \delta + u
\end{aligned}$$

에 대한 강인 제어의 후보로 큰 k값을 가진 고이득(high-gain) 제어기

$$u = -k(x_2 + x_1)$$

를 제안했다고 하자. (이 제어기를 sliding mode 제어기 [7]와도 비교해 보자.) 이제 $\varepsilon := 1/k$로 정의한다면, 폐루프 시스템은

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{13a}$$
$$\varepsilon\dot{x}_2 = -(x_2 + x_1) + \varepsilon(ax_2 + \delta) \tag{13b}$$

로 쓸 수 있고, $\varepsilon = 0$이라 하여 x_2^*를 구하면,

$$x_2^* = -x_1 \tag{14}$$

이 되며, 따라서 quasi-steady-state subsystem은

$$\dot{x}_1 = -x_1$$

이고 boundary-layer subsystem은

$$\frac{dx_2(\tau)}{d\tau} = -x_2(\tau) - x_1(0)$$

이 된다. 이 두 subsystem이 모두 안정하므로, 충분히 작은 ε에 대해 (즉, 충분히 큰 k에 대해) 불확실한 폐루프 시스템은 안정하며, 모든 해는 원점 부근으로 수렴할 것이다.

2.9. 표준형을 어떻게 얻는가?

지금까지 논의는 처음 시스템이 (5)의 형태로 주어지는 것을 전제로 하였다. 심지어 예제 1의 시스템도 (5)의 형태로 주어지긴 하였다. 하지만, 실제 응용의 경우에 보통 시스템을 모델링하고 나면, 어떤 파라메터를 ε으로 정하느냐는 문제가 있고, 또 ε을 정했다 하더라도 그 형태가 (5)와 같이 주어지는 경우는 많지 않다. 따라서, 필요할 경우 적절한 좌표변환을 적용하여 (5)의 형태로 가져가야 하는데, 이와 관련한 체계적인 방법은 없다. 결국 사용자의 직관과 경험으로 식 (5)를 얻은 뒤 해당 이론을 적용할 수 밖에 없다.

그런데, 적절한 좌표변환을 얻었다 하더라도, 좌표변환 식 자체가 ε에 의존하는 경우가 대부분이다. 이때는 원래 좌표계에서 주어진 시스템의 초깃값이 어떻게 (5)의 초깃값으로 변환되는지 주의깊게 살필 필요가 있다. 특히 비선형 시스템의 해석에 있어서는 시스템의 동작 영역이 전체 공간이 아닌 경우가 많기 때문에 더욱 주의가 필요하다.

3. PEAKING PHENOMENON의 이해

실제 고이득을 사용한 제어기나 관측기를 설계할 경우, 이들의 해석은 많은 경우 singular perturbation 이론에 의존하게 된다. 이 경우, 전술한 바와 같이 singular perturbation 표준형을 얻기 위해 좌표변환을 동원해야 하는 경우가 많은데, 이 좌표변환은 $\varepsilon \to 0$에 따라 발산하는 경우가 있다. 이 때, 열심히 노력하여 발산하지 않는 좌표변환을 찾으려고 할 수도 있겠지만, 사실 이것은 시스템의 내재적 성질 중 하나로 결코 극복될 수 없는 것이기도 하다.

이를 살펴보기 위해서, 본 편의 주제와 살짝 다를 수 있겠지만 peaking phenomenon에 대해 먼저 알아보고자 한다. 예를 들어,

$$\dot{x}_0 = -x_0 + \sin t, \qquad x_0(0) = x_o \tag{15}$$

과 같은 시스템에 원치 않는 교란신호 $x_1(t)x_2^j(t)$가 (j는 x_2를 제곱하는 어떤 정수) 영향을 주지만, 다행히 x_1과 x_2는 제어할 수 있다고 하자. 즉, 다음 시스템을 고려해 보자.

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= -x_0 + \sin t + x_1 x_2^j \\ \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= u \end{aligned} \tag{16}$$

단, x_0는 측정가능하지 않고 나머지 상태변수는 측정가능하여,

$$x := [x_1, x_2, x_3]^T$$

라 정의했을 때 선형 궤환 제어식

$$u = -k^T x$$

을 사용할 수 있다고 하자. 그러면, 우리는 이 제어식의 이득 $k \in \mathbb{R}^3$를 잘 설계하여 교란신호 $x_1(t)x_2^j(t)$를 가능한 한 빠르게 0으로 만들어 버림으로써 원하는 성능을 얻으려고 할 수 있다. 어떻게 k를 정하면 좋을까?

위 식에서 x_1, x_2, x_3 부분, 즉 x에 대해서만 살펴보면 3차 선형 시스템이므로, 3개의 고유치를 충분히 작은 ε에 대하여 모두 $-1/\varepsilon$에 위치시키면 어떨까? (이렇게 하는 이득 k를 구하는 것은 쉽다. $k = [1/\varepsilon^3, 3/\varepsilon^2, 3/\varepsilon]^T$임을 각자 확인해 보자.) 일반적인 선형 시스템 $\dot{x} = Ax$의 해는 $x(t) = e^{At}x(0)$으로 주어지며, 따라서 행렬 A가 Hurwitz 일 때

$$\|x(t)\| \le m e^{-\lambda t}\|x(0)\|$$

을 만족함을 알고 있다. 여기서 m와 λ는 양의 상수, 특히, $\lambda = |\max_i\{\mathrm{Re}(\lambda_i)\}|$, 즉, A의 모든 고유치 중 허수축에 가장 가까운 것에 관한 값이다. (절대값 기호는 λ를 양수로 만들기 위하여 사용하였다.) 때문에 폐루프 시스템의 모든 고유치가 $-1/\varepsilon$에 위치하도록 제어한다면 $\|x(t)\| \le m e^{-t/\varepsilon}\|x(0)\|$가 되고, ε을 줄이면 $x(t)$는 점점 더 빠르게 0으로 수렴할 것이다.

그런데 이 논리에서 한가지 간과한 것이 있다. λ가 ε에 의존하는 것처럼, m 또한 ε에 의존하기 때문에 ε을 바꿀 때마다 m도 바뀌는데, 특히 ε이 0으로 수렴할 때, m은 $1/\varepsilon^{n-1}$에 비례하는 정도로 커진다는 점이다 (단, n은 시스템 차수). 즉, ε을 줄이므로써 $x(t)$를 더 빠르게 0으로 보낼 수 있는 것은 맞지만, 대신 m이 커지기 때문에 $e^{-\lambda t}$가 충분히 작아지기 전까지, 즉, 처음 어느 정도의 시간 동안에 $\|x(t)\|$는 큰 값을 가질 수 있다 (Fig. 3 참조).

이러한 현상은 사실 시스템의 내재적인 성질로, 빠른 수렴을 원할 때 특정 초깃값에 대해서 매우 큰 초기 과

도상태를 가지는 현상을 피할 수 없다. 이를 개념적으로 살펴보기 위해 시뮬레이션 결과인 Fig. 3을 살펴보자. $\|x(t)\|$가 빠르게 0으로 수렴하려면 $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$가 빠르게 0으로 수렴해야 한다. 그런데, $x_1(0) = 1$이므로 $x_1(t)$가 빠르게 0으로 수렴하려면, $x_1(t)$의 미분인 $x_2(t)$가 초기 일정 시간동안 절대값이 큰 음수여야 할 것이다. 그런데 $x_2(0) = 1$인 상황에서 $x_2(t)$가 절대값이 큰 음수를 가지려면 $x_2(t)$의 미분인 $x_3(t)$가 시작 시간부터 빠르게 매우 큰 절대값을 갖는 음수가 되어야 할 것이다. 이런 상황을 염두에 두고 Fig. 3을 다시 보면, 왜 ε이 작아짐에 따라 $x_2(t)$와 $x_3(t)$가 아래쪽으로 peak를 보이고, 비교하자면 $x_3(t)$가 더 심한 peak을 보이는 지 이해할 수 있다. Fig. 3은 식 (16)으로 주어진 특정 좌표계와 특정 초깃값에 대한 시뮬레이션이지만, 시스템 (16)을 다른 좌표계에서 표기한다해도 시스템 상태변수 중 일부가 특정 초깃값에 대해 특정 방향으로 peak을 갖는 과도현상이 발생한다는 것과, 그 peak의 크기는 ε을 줄일 수록 커진다는 사실에는 변함이 없다.

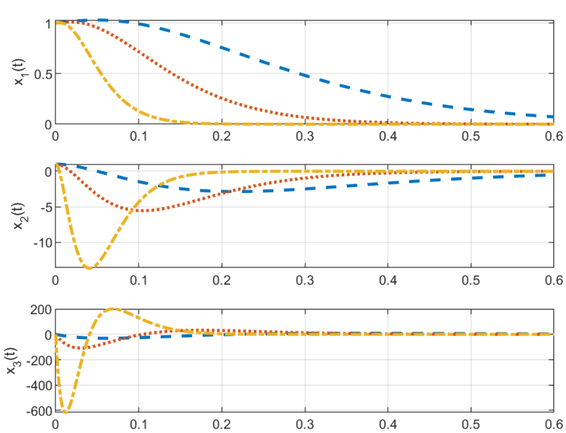

Fig. 3. 초깃값 $(x_1(0),x_2(0),x_3(0)) = (1,1,0)$일 때 $\varepsilon =$ 0.1 (blue dashed), 0.05 (red dotted), 0.02 (yellow dash-dot) 경우의 시스템 (16)에 대한 모의 실험

이와 같이, 시스템의 상태변수를 빠르게 수렴시키고자 할 때 어떤 초깃값에 대해서 필연적으로 peak이 발생할 수 밖에 없고, 그 정도는 빠르게 수렴시키려는 속도의 특정 지수 비율로 발생한다는 사실을 'peaking phenomenon'이라 하는데 Sussmann과 Kokotovic에 의해 처음 밝혀졌다 [4].

이 현상 때문에, 충분히 작은 ε을 통해 $x(t)$를 빠르게 0으로 수렴시켜 (16)의 교란신호 $x_1(t)x_2^j(t)$가 $x_0(t)$의 궤적을 많이 바꾸지 않도록 하는 계획에 타격을 받게 된다. 왜냐하면, $x_1(t)x_2^j(t)$가 빠르게 0이 되는 것은 맞지만 그 과정에서 $x_2(t)$가 매우 큰 값을 가질 수 있고, 이것이 교란신호의 적분값을 크게 만들 수 있기 때문이다. 이를 확인하기 위해 식 (15)의 해를 $\bar{x}_0(t)$라 하고 식 (16)의 해 $x_0(t)$와의 차이를 $\tilde{x}_0(t)$라 했을 때 이의 모의 실험 결과인 Fig. 4를 살펴보자.

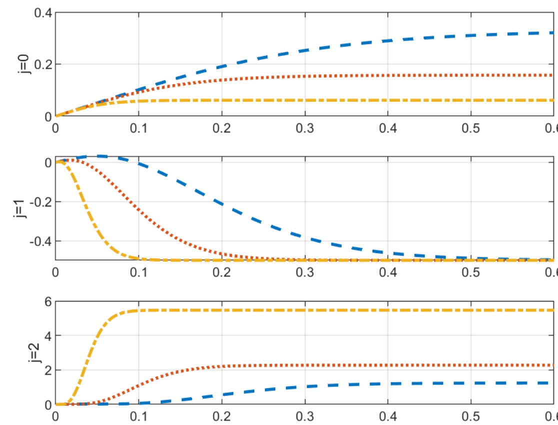

Fig. 4. 교란신호 $x_1(t)x_2^j(t)$에 대한 $\tilde{x}_0(t) = x_0(t) - \bar{x}_0(t)$의 그림. 초깃값 $(x_1(0),x_2(0),x_3(0)) = (1,1,0)$이고 ε은 각각 0.1 (blue dashed), 0.05 (red dotted), 0.02 (yellow dash-dot)이다. 위로부터 각각 $j = 0,1,2$일 때의 그림이다.

그런데 만약

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

으로 좌표변환을 한다면, 단순 계산을 통해 시스템 (16)이

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= -x_0 + \sin t + \frac{1}{\varepsilon^j} z_1 z_2^j \\ \varepsilon \dot{z}_1 &= z_2 & z_1(0) &= x_1(0) \\ \varepsilon \dot{z}_2 &= z_3 & z_2(0) &= \varepsilon x_2(0) \\ \varepsilon \dot{z}_3 &= -z_1 - 3z_2 - 3z_3 & z_3(0) &= \varepsilon^2 x_3(0) \end{aligned}$$

로 변환됨을 알 수 있다. 이 경우, 초깃값은 $\varepsilon \to 0$에도 불구하고 값이 커지지 않는다. 또한, $z_i(t)$의 경우에도 $\varepsilon \to 0$에 따라 변화 속도는 빨라지지만 peak 현상을 보이지 않는다. (그 이유를 boundary-layer subsystem 유도과정과 연관지어 생각해 보자.) 하지만, 줄이고자 했던 교란신호항이 커지는 것을 볼 수 있다. 이를 피하고자 새로운 좌표변환

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

을 도입할 경우, 시스템은

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}_0 = -x_0 + \sin t + \varepsilon z_1 z_2^j && \\
&\varepsilon \dot{z}_1 = z_2 && z_1(0) = \frac{1}{\varepsilon} x_1(0) \\
&\varepsilon \dot{z}_2 = z_3 && z_2(0) = x_2(0) \\
&\varepsilon \dot{z}_3 = -z_1 - 3z_2 - 3z_3 && z_3(0) = \varepsilon x_3(0)
\end{aligned}
$$

이 되어 $\varepsilon \to 0$일 때 교란신호 항도 커지지 않고 $z_i(t)$도 peak 현상을 보이지 않는다. 하지만, 대신 초깃값이 $\varepsilon \to 0$에 따라 무한히 커지게 됨을 알 수 있다. 결국 피할 수가 없는 것이다.

이상에서 살펴본 현상은 특히 고이득 관측기(high-gain observer)를 사용하여 출력 궤환 제어를 시도할 때 많이 발생하게 된다. 다행히 출력 궤환 제어의 경우 제어 입력을 설계자 마음대로 정할 수 있기 때문에, 제어하고자 하는 시스템에 영향을 주는 peak 현상을 포화(saturation) 함수를 의도적으로 사용하여 제한할 수 있다. 이러한 맥락에서 포화 함수를 사용하는 아이디어는 Khalil 교수가 최초로 제안하였으며 [5], 강인한 과도 응답을 보장할 수 있는 외란관측기 설계에도 활용되었다 [6].

4. 결론

본 편에서는 여러모로 쓸모가 있지만 비선형 시스템 이론의 일부로 다루어져 쉽게 접하지 못했던 singular perturbation 이론(특이 섭동 이론이라 번역하기도 한다)을 선형 시스템에 국한하여 살펴보았다. 이 이론은 바이오 시스템의 해석에 나오는 bi-stability나 limit cycle을 이용한 clock의 설계 및 해석에도 응용될 수 있는 등 비선형 시스템의 경우에 더 많은 응용 예가 있는 것도 사실이다. 따라서 관심있는 독자라면 본 편의 기초 지식 위에 참고문헌을 활용하여 더 풍부한 응용을 살펴볼 것이라 믿으며 본 편을 마치고자 한다.

참고

본 내용은 [1, Chapter 11]을 기반으로 작성하였으며, 본 편의 LaTeX 조판본은 제어이론연구회 홈페이지에서 구할 수 있다.

REFERENCES

[1] H. Khalil, *Nonlinear Systems*, 3rd edition, Prentice Hall, 2002.

[2] P.V. Kokotovic, H.K. Khalil, and J. O'Reilly, *Singular Perturbations Methods in Control: Analysis and Design*, Academic Press, New York, 1986. Republished by SIAM, 1999.

[3] F.C. Hoppensteadt, "Singular perturbations on the infinite interval," *Trans. Amer. Math. Soc.*, 123:521–535, 1966.

[4] H.J. Sussmann and P.V. Kokotovic, "The peaking phenomenon and the global stabilization of nonlinear systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36:424–440, 1991.

[5] A.N. Atassi and H.K. Khalil, "A separation principle for the stabilization of a class of nonlinear systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44:1672–1687, 1999.

[6] J. Back and H. Shim, "Adding robustness to nominal output-feedback controllers for uncertain nonlinear systems: A nonlinear version of disturbance observer," *Automatica* 44:2528–2537, 2008.

[7] 심형보, "슬라이딩 모드 제어에 나오는 Filippov 해는 무엇이고 왜 필요할까?", 제어로봇시스템학회지, 2020년 3월

심형보 교수는 2000년 서울대학교 전기공학부에서 박사학위를 받고 미국 산타바바라 소재 캘리포니아 주립대학에서 박사후 과정을 수료 후 현재 서울대학교에서 교수로 재직 중이다. Automatica, IEEE Transactions on Automatic Control 등 저널의 associate editor를 맡은 바 있다.