

# 슬라이딩 모드 제어에 나오는 Filippov 해는 무엇이고 왜 필요할까?

심형보 (서울대학교 전기정보공학부)

알 수 없는 미지의 상수  $a$ 가  $-1 \leq a \leq 1$ 을 만족함을 알고 있을 때

$$\dot{x}(t) = a + u$$

로 주어진 1차 시스템에 대해, 임의의 초깃값으로부터 원점으로 보내는 궤환(feedback) 제어법칙  $u(x)$ 를 설계할 수 있을까? 슬라이딩 모드 제어에 대해 지식이 있는 독자라면

$$u(x) = \begin{cases} -2, & x > 0 \\ ?, & x = 0 \\ +2, & x < 0 \end{cases}$$

와 같은 궤환 제어법칙을 떠올릴 수 있을 것이다. 이 때, 물음표 ?에 알맞는 값은 과연 무엇일까?

## 1. 불연속 궤환제어의 힘: 강제로 원점으로 보내기

불연속 궤환제어의 한 종류인 슬라이딩 모드 제어(sliding mode control)는 강인제어(robust control)의 한 방법으로 널리 알려져 있다. 슬라이딩 모드 제어가 외란관측기(DOB)나  $H_\infty$  제어 등과 다른 대표적인 특징은 non-vanishing 불확실성에 대해서도 강인성을 가진다는 것이다. 이 말이 의미하는 바를 이해하기 위해 단순한 1차 시스템

$$\dot{x} = \delta(t, x) + u$$

를 생각해 보자. 여기서  $\delta(t, x)$ 는 불확실한 미지의 항(uncertainty)이고, 이 시스템의 원점  $x = 0$ 을 안정화하는 것이 목표라 하자. 어떤 제어를 만들면 이 목표를 달성할 수 있을까?

만약  $\delta(t, x)$ 가  $-1 \leq a \leq 1$ 의 범위를 가진 미지의 상수  $a$ 에 대해

$$\delta(t, x) = ax$$

의 형태로 주어진다면, 우리는 쉽게  $u(x) = -2x$ 라는 간단한 선형 궤환제어가 강인제어 역할을 함을 알 수 있다. 즉,

$$\dot{x} = ax - 2x = (a - 2)x$$

인데,  $-3 \leq (a - 2) \leq -1$ 이므로 이 시스템의 모든 해는 시간이 지남에 따라 0으로 수렴하기 때문이다. 그런데 선형 제어는  $u(0) = 0$ , 즉,  $x = 0$ 에서 입력이 0이 되기 때문에 앞에서 살펴본 원점에서의 수렴 성질은 불확실성  $\delta$

역시 같은 성질, 즉,  $\delta(t, 0) = 0$ 이기 때문에 가능한 일이었다. 이와 같이 목표한 평형점에서 불확실성이 0이 되는 불확실성을 vanishing 불확실성이라 부른다.

반면, non-vanishing 불확실성을 가진 시스템의 예를 들자면, 0 아닌 미지의 상수  $a$ 에 대해

$$\dot{x} = \delta(t, x) + u = a + u \tag{1}$$

를 생각해 볼 수 있다. 이 경우  $\delta(t, x) = a$ 가 되므로,  $\delta(t, 0) \neq 0$ 이 되는데, 이런 시스템에 대해서도 원점으로 보내는 강인제어를 설계할 수 있을까?

사실 이 문제의 답은 좀 싱겁게 구할 수 있다. 잘 알려진 PI(proportional-integral) 제어기  $u(x) = -k_1x - k_2 \int_0^t x(\tau) d\tau$ (단,  $k_1 > 0, k_2 > 0$ )가  $x(t)$ 를 원점으로 보낼 수 있다. (각자 증명해 보자.) 안되겠다. 좀더 어려운 불확실성을 고려하기 위해,  $-1 \leq \phi(t) \leq 1$ 의 범위를 만족하는 (영함수가 아닌) 미지의 연속함수  $\phi(t)$ 에 대해  $\delta(t, x) = \phi(t)$ 인 경우, 즉

$$\dot{x}(t) = \phi(t) + u \tag{2}$$

를 생각하자. 이 경우 역시  $\delta(t, 0) \neq 0$ 이므로 non-vanishing 불확실성이다.

이 경우의 궤환제어기로는 가변구조 제어기(variable structure controller) 혹은 불연속 궤환제어기(discontin-

ous feedback controller)<sup>1</sup>가 제적이다. 예를 들면,

$$u(x) = \begin{cases} -2, & x > 0 \\ +2, & x < 0 \end{cases} \quad (3)$$

와 같은 제어를 말한다. 이 제어를 인가할 때 폐루프(closed-loop) 시스템은

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \phi(t) - 2 \leq -1, & x(t) > 0 \\ \dot{x}(t) &= \phi(t) + 2 \geq +1, & x(t) < 0 \end{aligned}$$

를 만족하므로, 초깃값  $x(0)$ 가 양수라면 시간이 흐름에 따라 작아져 0에 도달하고,  $x(0)$ 가 음수라면 점점 커져 0에 도달한다. 즉, (시간에 따라 변하는) non-vanishing 불확실성이 있음에서 불구하고 유한시간 내에 원점에 도달함을 알 수 있다.

또한, 앞에서 살펴본  $\delta(t, x) = ax$ 의 경우에도 불연속 궤환제어식

$$u(x) = \begin{cases} -2x - 1, & x > 0 \\ -2x + 1, & x < 0 \end{cases} \quad (4)$$

에 의해,  $x > 0$ 에서  $\dot{x} \leq -x - 1 \leq -1$ 이고,  $x < 0$ 에서  $\dot{x} \geq -x + 1 \geq 1$ 이 되기 때문에 역시 유한시간 내에 원점에 도달한다.

정리하면 식 (3)이나 (4)와 같이 주어지는 불연속 궤환 제어식은 vanishing 불확실성이든 non-vanishing 불확실성이든 모두 유한시간 내에 원점으로 보낼 수 있는 강력한 강인제어기임을 알 수 있다.

## 2. 독자의 불만과 공학자의 해법

그런데 여기까지 내용을 살펴본 독자는 이렇게 물을 수 있다: “식 (3)이나 (4)에서  $x = 0$ 일 때 입력값  $u(0)$ 는 왜 말 안하나요?”

난감하다. 사실 말을 안한게 아니라 못한 것이기 때문이다. 유한시간 내에 원점으로 도달했다고 하면, 그 시간 이후로  $x(t)$ 는 0의 값을 유지해야 한다. 즉,  $\dot{x}(t) = 0$ 이어야 한다. 그런데 그렇게 되려면 예를 들어 (1)의 경우에는

$$0 = a + u(0)$$

즉,  $u(0) = -a$ 여야 하는데  $a$ 는 미지의 상수이니 이렇게

<sup>1</sup>불연속 궤환제어기란 말은 궤환제어식이 상태변수  $x$ 에 대해 불연속이란 뜻이다. 궤환제어식이 시변(time-varying)이어서  $u(t, x)$ 와 같이 될때, 만일 시간  $t$ 에 대해  $u$ 가 불연속이라 하여도 (큰 문제를 만들지 않기 때문에) 이런 경우에는 불연속 궤환제어기라 칭하지 않는다.

<sup>2</sup>무작위 실수 값이 0을 포함한 유한 구간에서 0을 가질 확률은 수학적으로 0이다.

설정할 수는 없다. 마찬가지로 (2)의 경우에는

$$0 = \phi(t) + u(0)$$

여야 하는데,  $u(0) = -\phi(t)$ , 즉  $u(0)$  값이 시간에 따라 변한다는 것도 말이 안된다.

물론 공학자로서 나의 변명은 이리하다. 위 불연속 제어식을 실제 제어기로 구현할 때는 샘플링(sampling) 주기  $\Delta$ 에 대해 매 샘플링 시간  $t = k\Delta$ ( $k$ 는 정수)마다  $u(x(k\Delta))$ 를 결정할 것인데, 부동소수점 표기를 사용하는 디지털 컴퓨터에서 센서가 측정한 값  $x(k\Delta)$ 가 완전히 0이 될 확률은 매우 작다.<sup>2</sup> 그러니 내가  $u(0)$ 의 값을 정하지 않고  $x(t) > 0$ 인 경우와  $x(t) < 0$ 인 경우만 코딩해 넣어도 제어 프로그램이 무리없이 돌아갈 것이다. 특히 어느 정도 시간이 흘러  $x(k\Delta)$ 가 원점 부근에 도착하게 되면  $u$ 의 값은 양수와 음수를 반복하게 되고  $x(k\Delta)$  역시 원점 부근에서 양수와 음수를 반복하며 머무르게 되겠지만  $x(k\Delta)$ 가 0이 되는 일은 거의 발생하지 않을 것이다. (이렇게 목표값에 도달하지 않고 목표값 위아래로 교번하는 현상[그림 1]을 ‘chattering’이라 하는데 슬라이딩 모드 제어의 대표적 단점이라 할 수 있다.)

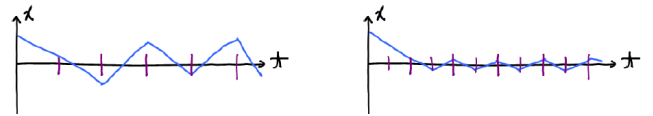


Fig. 1. 채터링(chattering) 현상은 샘플링 주기  $\Delta$ 가 작아 질수록 줄어드는 것이 일반적이다.

아무튼  $x(t)$ 를 매  $\Delta > 0$  시간마다 샘플링을 통해  $u$ 를 구한 뒤  $\Delta$  시간동안  $u$ 를 상수로 유지한다는 논리로 독자가 제기한 문제를 빠져나가는 듯 하지만, 사실 이럴 것이라면 처음부터 이론을 이산시간 시스템이나 sampled-data 시스템에 대해 전개했어야 했다. 다만, 제어 대상인 실제 플랜트(plant)는 연속시간 시스템인 경우가 대부분이라, 이산시간에서 이론을 전개하면 아무래도 근사(approximation) 결과 밖에 얻지 못하는 경우가 많다.

결국 연속시간에서 이론을 제대로 전개하기 위해서는 독자가 제기한 문제를 해결해야 한다. 하지만... 음... 자포자기의 심정으로 그냥  $u(0) = 0$ 이라고 정의해 볼까하는 마음이 생긴다.

### 3. 수학자의 불만과 수학자의 해법

그런데 선볼리  $u(0)$ 의 값을 고정하게 되면 이번에는 수학자의 항의를 받게 된다. 예를 들어, 시스템 (1)의 미지의 수  $a$ 가 1이었다고 하고 식 (3)의 제어입력을 사용할 경우,  $u(0)$ 을 0으로 정한다면 페루프 시스템은

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) = \begin{cases} a - 2 = -1, & x(t) > 0 \\ a + 0 = 1, & x(t) = 0 \\ a + 2 = 3, & x(t) < 0 \end{cases} \quad (5)$$

가 되는데, 이 페루프 시스템은 일부 초깃값에 대해 해를 갖지 못하는 문제에 봉착하게 된다. 예를 들어, 초깃값  $x(0) = 0$ 을 가지는 해  $x(t)$ 에 대해 생각해 보자.  $x(0) = 0$  이라면  $t = 0$ 에서  $\dot{x}(t) = 1 > 0$ 이므로  $x(t)$ 는  $t = 0$ 에서 증가해야 하는데, 증가하자마자  $\dot{x}(t) = -1 < 0$ 이므로 다시 감소해야 하니, 결국 미분방정식 (5)의 초깃값  $x(0) = 0$ 에 대한 초깃값 문제(initial value problem)의 해, 즉 해당 미분방정식과 초깃값 조건을 만족하는 연속함수<sup>3</sup>  $x(t)$ 는 존재하지 않음을 알 수 있다.<sup>4</sup>

이런 현상은 사실 (5)의 우변  $f(x)$ 가  $x$ 에 대해 불연속이기 때문에 발생하는 문제이다. 시스템 (5)는 비선형 시스템이고, (5)와 같은 표현에서 우변  $f(x)$ 가 상태변수  $x$ 에 대해 연속이면 해가 (적어도 초기시간으로부터 작은 시간동안) 존재함이 알려져 있다 [1, Chapter 3]. 하지만, 우리의 예는 우변  $f(x)$ 가  $x$ 에 대해 연속이 아니기 때문에 해의 존재성을 보장할 수 없는 상황이고, 위 예제가 바로 그런 경우인 것이다.<sup>5</sup>

결국 상태변수에 대해 불연속한 우변을 가지는 미분방정식을 사용할 경우 해가 존재하지 않을 수 있다는 점이 해당 이론 전개에 큰 걸림돌이 된다. 수학적으로 엄밀한 제어이론을 정립하겠다고 하고는 해의 존재성조차 확립할 수 없다는 사실에 수학자는 불만을 가질 수밖에 없다. 이 문제에 대한 수학자의 해법은 해의 개념을 확장하여 불연속인 우변을 가지는 미분방정식이 확장된 의미에서는 항상 해를 갖게 하는 것이다. 해의 개념을 확장하는 것만으로 문제가 해결된다고 하면 다소 이상하게 들릴

수도 있겠으나, 아무렇게나 확장하자는 것은 아니고 확장된 해의 개념이 실제적으로 의미를 가지도록 해보자는 것이다. 이렇게 해서 슬라이딩 모드 제어에서 채택된 개념은 Filippov가 제안한 해의 개념 [2]이다. Filippov의 해가 가지는 실용적인 의미는 실제적인 구현에서  $\Delta$ 가 극단적으로 0으로 수렴했을 때의 해에 해당한다는 점이다. 예를 들어, 고전적인 개념의 해를 갖지 않았던 시스템 (5)가 초깃값  $x(0) = 0$ 에 대해 Filippov의 해  $x(t) = 0$ 을 가진다는 것을 보일 것인데, 이 해는 실제 상황에서  $\Delta$ 가 극단적으로 작아질 때의 해를 표현한 것이다 (그림 1 참조). 고전적인 해의 개념에서는  $\Delta$ 가 0이 되면 해가 존재하지 않았다는 것을 상기하자.

### 4. FILIPPOV의 해

#### 4.1. Differential Inclusion

Filippov의 해를 이해하기 위해 differential inclusion에 대해 알아보자. 예를 들면,

$$\dot{x}(t) \in [-1, 1] \quad (\text{almost all } t), \quad x(0) = 0 \quad (6)$$

과 같은 것을 differential inclusion이라 부르는데,<sup>6</sup> 이는 differential equation(미분 방정식)의 확장된 개념이라고 볼 수 있다. 미분방정식에서는 우변이 하나의 값이었던 것에 반해, differential inclusion의 경우에는 우변이 ‘집합’이고, 상태변수  $x(t)$ 의 시간  $t$ 에서의 미분이 우변 집합에 속하기만 하면 된다는 뜻이다.

한편, (6)에 주어진 differential inclusion을 푼다는 말은, (6)을 만족하는 절대연속(absolutely continuous)인 함수<sup>7</sup>  $x(t)$ 를 구하는 것이다. Differential inclusion을 푸는 방법이 있는가? 사실 미분방정식을 푸는 것도 일반적인 절차가 있다고 보기는 어려운데 differential inclusion에 대해 그런 절차적 방법을 기대할 수는 없지만, 그렇다고 differential inclusion을 푸는 것이 그렇게 어려운 것도 아니다. 실제로 식 (6)을 가만히 보고 있다면, 모든  $t$ 에 대해  $x(t) = 0$ 이 하나의 해라는 것을 바로 알 수 있고,  $x(t) = t$  역시 식 (6)을 만족하는 또 다른 해이고,  $0 \leq t \leq 1$  동안  $x(t) = t$ 이고  $1 \leq t \leq 2$  동안  $x(t) = 1 - 0.5(t - 1)$ 도 해이고,

<sup>3</sup>더 엄밀히 말하면, 해당 미분방정식을 거의 모든(almost all) 시간동안 만족하는 절대연속(absolutely continuous) 함수  $x(t)$ , 즉 Caratheodory 해가 존재하지 않는다.

<sup>4</sup>물론 초깃값이  $x(0) > 0$ 이라면,  $0 \leq t < x(0)$  동안  $x(t) = x(0) - t$ 가 해이고,  $x(0) < 0$ 이라면,  $0 \leq t < -x(0)/3$  동안  $x(t) = x(0) + 3t$ 가 해가 됨은 자명하다. 하지만 이런 경우라도  $x(t)$ 가 0이 되는 순간과 그 이후의 해가 존재하지 않는다.

<sup>5</sup>물론, 우변이 불연속이라고 항상 해가 존재하지 않는 것은 아니고, 예를 들어,

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} 1, & x(t) > 0 \\ 1, & x(t) = 0 \\ -1, & x(t) < 0 \end{cases}$$

같은 경우에는  $x(0) \geq 0$ 인 경우에  $x(t) = x(0) + t$ ,  $x(0) < 0$ 인 경우에  $x(t) = x(0) - t$ 라는 해를 가진다.

<sup>6</sup>기호  $[a, b]$ 는  $\{x : a \leq x \leq b\}$ 를 의미한다.

<sup>7</sup>절대연속 함수에 대해서는 부록을 보라.

그림 2와 같이 무수히 많은 해를 바로 떠올릴 수 있겠다. 한편, differential inclusion의 해는 절대연속이면 되기 때문에 특정  $t$ 에 대해 미분이 안되는 해도 허용(부록 참조)하며 (6)에서 almost all이란 말이 붙은 이유이다.

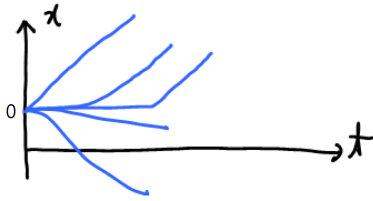


Fig. 2. 0에서 출발하고 기울기가 -1과 1 사이에 놓인 절대연속 함수는 모두 (6)의 해가 된다.

### 4.2. Filippov의 해

Filippov의 해를 소개하기 위해 상황을 먼저 설정하도록 하자. 우선 상태공간  $\mathbb{R}^n$ 이 열린집합  $\Omega_+$ 와  $\Omega_-$ 로 나누어져 있고 그 경계면을 집합  $S$ 라 하여 세 집합은 서로소(disjoint)이며  $\mathbb{R}^n = \Omega_+ \cup S \cup \Omega_-$ 이라 하자(그림 3). 그리고 우변이 불연속인 시스템

$$\dot{x} = f(x) = \begin{cases} f_+(x), & x \in \Omega_+ \\ f_-(x), & x \in \Omega_- \\ *, & x \in S \end{cases} \quad (7)$$

을 생각하자. 여기서  $f_+$ 와  $f_-$ 는 각각  $\Omega_+$ 와  $\Omega_-$  위에서 locally Lipschitz하다고 하자(혹은 간단히 미분가능하다고 하자; 부록 참조). 한편, \*는 어떤 값이라고 하자. Filippov 해는 결국 \*의 값에 영향을 받지 않을 것이기 때문에 중요하지 않다. 이제 일반적으로  $f(x)$ 는  $S$ 에 위치한  $x$ 에서 불연속한 함수다. 앞서 살펴 본 시스템 (5)의 예를 들면,  $n = 1, \Omega_+ = \{x : x > 0\}, \Omega_- = \{x : x < 0\}, S = \{0\}, f_+(x) = -1, f_-(x) = 3$ , 그리고  $* = 1$ 이라 할 수 있겠다. 이 경우 (7)의 (고전적인) 해는 존재하지 않았다.

시스템 (7)의 Filippov의 해는 다음에 주어진 differential inclusion의 해로 정의한다:

$$\dot{x} \in F(x) = \begin{cases} \{f_+(x)\}, & x \in \Omega_+ \\ \{f_-(x)\}, & x \in \Omega_- \\ \{cf_+(x) + (1-c)f_-(x) : 0 \leq c \leq 1\}, & x \in S \end{cases} \quad (8)$$

두 식 (7)과 (8)을 비교해 보면,  $x$ 가 불연속이 아닌 점에서는 우변의 ‘값’을 단일원소 ‘집합’으로 바꾼 것뿐이며,<sup>8</sup> 불연속인 점  $x$ 에서는 원래 정의된 \* 값을 버리고, 두 벡터

$\bar{f}_+(x)$ 와  $\bar{f}_-(x)$ 의 convex combination으로 주어진 ‘집합’이 되었음을 알 수 있다. 여기서  $\bar{f}_+(x)$ 와  $\bar{f}_-(x)$ 는

$$\bar{f}_+(x) := \lim_{y \rightarrow x, y \in \Omega_+} f_+(y)$$

$$\bar{f}_-(x) := \lim_{y \rightarrow x, y \in \Omega_-} f_-(y)$$

로 각각 정의되고,<sup>9</sup>  $f_+$ 와  $f_-$ 가  $\Omega_+$ 와  $\Omega_-$ 에서 연속함수이기 때문에 해당 영역 경계선에 놓인  $x$ 에서의 극한값이 잘 정의된다. 이 상황을 그림으로 묘사하면 그림 3과 같다. 결국 Filippov의 해를 정함에 있어 불연속성이 발생하는 영역  $S$ 에서의 vector field  $f$ 의 값은 의미가 없다. 오히려 불연속성이 발생하는 점 주변의 vector fields가 불연속성이 발생하는 점에서의 시스템 행동을 결정한다고 봐야한다.

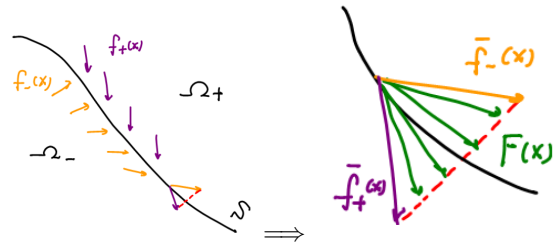


Fig. 3. 영역  $\Omega_+$ 와  $\Omega_-$ 에서  $F(x)$ 는 해당 영역의 vector field  $f_+$ 와  $f_-$  하나만을 가지는 집합이나, 영역  $S$ 에서  $F(x)$ 는 확대된 오른쪽 그림의 vector fields(화살표들)와 같이  $\bar{f}_+(x)$ 와  $\bar{f}_-(x)$ 의 convex combination 집합이 된다. 이 집합에는  $S$ 에 접하는 vector field(화살표)가 포함됨에 주목하자. 여기서  $\bar{f}_+(x)$ 는  $\Omega_+$ 에서  $x$ 로 접근하는  $y$ 에 대한  $f_+(y)$ 의 극한값이다.  $\bar{f}_-(x)$ 도 마찬가지로 정할 수 있다.

식 (8)로 주어진 differential inclusion의 해가 바로 식 (7)의 Filippov 해임을 알았으니, 이전에 살펴본 시스템 (5)의 Filippov 해를 찾아보자. 식 (5)에 해당하는 differential inclusion은

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)) = \begin{cases} \{-1\}, & x(t) > 0 \\ [-1, 3], & x(t) = 0 \\ \{3\}, & x(t) < 0 \end{cases} \quad (9)$$

이고, 이 경우 초깃값  $x(0) = 0$ 에 해당하는 해는  $x(t) = 0$  밖에 없음을 알 수 있다. 왜 이것밖에 없냐고 묻는다면,  $\dot{x}(0) \in [-1, 3]$ 이라는 사실로부터  $x(t)$ 는  $t = 0$ 에서 증가할 수도 있고 감소할 수도 있는 것처럼 보이지만, 예를

<sup>8</sup>따라서  $F(x)$ 를 set-valued map이라 부른다. 즉, 벡터를 인자로 받아 집합을 결과값으로 돌려주는 함수인 것이다.

<sup>9</sup> $f_+$ 는  $\Omega_+$ 에서만 정의되어 있으므로  $S$ 에 놓인  $x$ 에서는 정의되지 않기 때문에  $f_+(x)$ 란 값은 존재하지 않는다. 때문에 극한을 이용하여  $\bar{f}_+(x)$ 를 정의하는 것이다.

들어 만약 조금이라도 증가한다면 바로  $\dot{x}(t) = -1$ 이 되어 다시 감소해야 하기 때문에 위 differential inclusion을 만족하는 절대연속인 함수  $x(t)$ 는  $x(t) = 0$  밖에 없는 것이다. 재미있는 점은, 불연속인 영역에서 어떤 ‘값’ 대신 ‘집합’, 이 경우는 어떤 ‘범위’로 바꾸었음에도 불연속인 영역 바깥에서의 vector fields의 방향이 불연속인 영역을 향하고 있기 때문에, 결국 그 범위에서  $\dot{x}$ 가 택할 수 있는 값은 유일할 수 밖에 없고 그에 따라 유일한 Filippov의 해가 얻어졌다는 점이다. 물론 이렇게 유일한 해가 얻어지는 것이 불연속인 우변을 갖는 미분방정식의 Filippov 해에 있어 일반적인 상황은 아니나, 슬라이딩 모드 제어는 모두 이런 상황을 일부러 만들기 때문에, 슬라이딩 모드 제어에 있어 Filippov 해는 유일하게 결정된다. 한편,  $x(0) > 0$ 인 초깃값에 대한 Filippov 해는

$$x(t) = \begin{cases} x(0) - t, & 0 \leq t < x(0), \\ 0, & x(0) \leq t \end{cases}$$

임도 쉽게 알 수 있다.  $x(t)$ 는  $t = x(0)$ 에서 미분가능하지 않지만 여전히 절대연속인 함수이다.

지금까지 불연속인 영역에서 미리 정한 값 \*대신 주변 vector field들의 두 극한의 convex combination 집합으로 치환하는 것만으로 앞서 논의했던 여러가지 장애가 해결됨을 살펴 보았다. 다시금 (5)의 예를 살펴본다면, 원래  $a$ 의 값은 범위  $[-1, 1]$ 에 속하는 불확실한 값이었고 따라서 해당하는 differential inclusion

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)) = \begin{cases} \{a - 2\}, & x(t) > 0 \\ [a - 2, a + 2], & x(t) = 0 \\ \{a + 2\}, & x(t) < 0 \end{cases} \quad (10)$$

역시 불확실한 시스템이다. 앞선 논의에서, 상태변수  $x(t)$ 가 0이 되었을 때 0에 머물러 있게 하려면 고전적인 해의 관점에서는 입력이 미지의 값  $u(0) = -a$ 를 가져야 했다. 그렇지만, Filippov의 해의 관점에서는 불확실한 differential inclusion (10)에서  $x = 0$ 인 경우에 해당하는 우변 집합  $[a - 2, a + 2]$ 이 0을 항상 포함한다는 사실로부터  $x(t) = 0$ 인 해를 만들어낼 수 있음에 주목해야 할 것이다. 또한, 초깃값  $x(0)$ 가 양수라면  $x(t) > 0$  동안에는  $\dot{x}(t) = a - 2 < 0$ 이므로, 불확실한  $a$ 에도 불구하고 감소한다는 사실은 변함이 없고,  $x(t) = 0$ 이 되는 순간부터  $\dot{x}(t) = 0$ 을 만족하여  $x(t) = 0$ 을 유지하는 것이 Filippov의 해라는 것을 알 수 있을 것이다. 이는 실제 현상을 잘 묘사하는 의미있는 해라는 것을 음미해 보자.

### 5. 슬라이딩 모드 제어의 기초

보통  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ 로 주어진 어떤 시스템의 원점을 궤환제어를 통해 안정화하는 것은, 그림 4(왼쪽)과 같은  $\dot{x} = f(x)$ 의 vector field를  $u = \alpha(x)$ 란 궤환제어를 통해 그림 4(오른쪽)과 같이 안정화된 원점을 갖는  $\dot{x} = f(x) + g(x)\alpha(x)$ 를 만드는 것이라 할 수 있다.

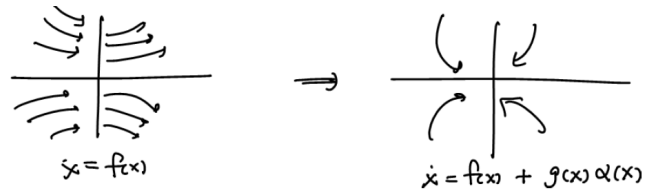


Fig. 4. 상태변수에 연속인 궤환제어식  $u = \alpha(x)$ 를 통한 제어

이에 반해, 슬라이딩 모드 제어란 상태공간 상에 sliding surface(비선형의 경우 sliding manifold)를 만들어 상태변수가 일단 sliding surface에 유한시간 내에 도달한 뒤 sliding surface 안에서 원점으로 향하게(sliding) 하는 제어 방법을 사용한다 (그림 5).

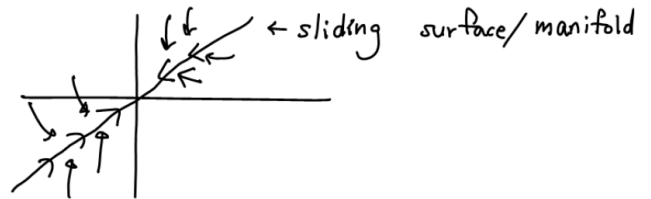


Fig. 5. 슬라이딩 모드 제어의 개념도

그렇다면 대체 왜 이런 방식을 사용하는 것일까? 그 이유는 시스템에 존재하는 불확실성과 외란에도 불구하고 상태변수를 sliding surface로 유한시간 내에 보내고 그곳에 머물도록 하는 강인 제어방법(우변이 불연속인 바로 그 제어방법!)을 알고 있기 때문인데, 이 방법에 의해 sliding surface에 들어온 상태변수는 불확실성에 영향을 받지 않고 원점으로 수렴하게 된다. 그림 4과 같은 보통의 제어방법에서는 불확실성과 외란에 대처하는 강인한 궤환입력  $u = \alpha(x)$ 를 찾는 것이 쉽지 않은 반면, 그림 5의 sliding surface라는 중간 개념을 사용하면 쉽게 강인 제어를 설계할 수 있다.

예를 들어 보자. 불확실한 2차 시스템

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (11a)$$

$$\dot{x}_2 = h(x) + g(x)u \quad (11b)$$

에서  $h$ 와  $g$ 는 미지의 함수이지만, 알려진 함수  $\rho_0(x)$ 와 알려진 양의 상수  $g_0$ 가 있어 모든  $x$ 에 대해  $|h(x)| \leq \rho_0(x)$

와  $g(x) \geq g_0 > 0$ 가 성립한다고 하자. 이 시스템의 원점을 안정화 시키는 방법은 무엇일까? (이 경우, 특히  $h(0) \neq 0$  이라고 하면 1절에서 소개한 non-vanishing 불확실성이 되어 원점에서 0이 되는 연속 궤환제어  $u(x)$ 로는 원점을 안정화하기는 어렵다.)

슬라이딩 모드 제어를 활용하기 위해 우선 sliding surface를

$$\{x : s(x) := x_1 + x_2 = 0\}$$

와 같이 설계하자. 이 sliding surface는 설계자가 정하였으므로 불확실성이 없다. 한편, 어떤 방법으로 상태변수  $x(t)$ 가 sliding surface에 계속 머무른다고 하면,  $s(x(t)) = x_1(t) + x_2(t) = 0$ 가 계속 만족되는 것이므로, 식 (11a)으로부터

$$\dot{x}_1(t) = \dot{x}_2(t) = -x_1(t)$$

가 되어,  $x_1(t)$ 는 0으로 수렴함을 알게 된다. 또한,  $s(x(t)) = 0$ 이므로,  $x_2(t) = -x_1(t)$ 이 되어  $x_2(t)$  역시 0으로 수렴함을 알게 된다. 즉, sliding surface를 타고 흘러 (sliding) 원점으로 수렴하게 되는 것이다! (이 과정을 슬라이딩 모드 제어에서는 ‘sliding phase’라고 한다.)

남은 일은 임의의 초깃값  $x(0)$ 로부터 출발한 시스템의 해가 유한시간 내에 sliding surface에 도달한 뒤 계속 그곳에 머물러 있도록 제어 입력  $u(x)$ 를 설계하는 것이다. (상태변수가 유한시간 내에 sliding surface까지 도달하는 과정을 ‘reaching phase’라고 한다.) 이는  $s(x(t))$ 가 유한시간 내에 0이 되는 것을 목표로 하는 것이므로 일단  $V(x) = (1/2)s(x)^2$ 라는 함수를 통해 이 목표를 달성하는  $u(x)$ 를 설계해 보자. 그러면,

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s\dot{s} = s[x_2 + h(x) + g(x)u] \\ &\leq |s|g(x) \left| \frac{x_2 + h(x)}{g(x)} \right| + sg(x)u \end{aligned}$$

가 되므로,

$$\left| \frac{x_2 + h(x)}{g(x)} \right| \leq \frac{|x_2| + \rho_0(x)}{g_0} =: \rho(x)$$

라고  $\rho(x)$ 를 정의하고

$$\begin{aligned} u(x) &= -(\rho(x) + 1)\text{sign}(s(x)) \\ &= \begin{cases} -\rho(x) - 1, & s(x) > 0 \\ \rho(x) + 1, & s(x) < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

라는 불연속 궤환제어기(슬라이딩 모드 제어기)에 의해

$$\dot{V} \leq |s|g(x)\rho(x) + sg(x)u(x) = -g(x)|s| \leq -g_0\sqrt{2V}$$

가 된다. 이 식으로부터  $V(s)$ 가 (따라서  $s(x)$ 도) 유한시간 내에 0이 됨을 알 수 있다. 이를 보이고 싶다면,  $W(x) := \sqrt{2V(x)} = |s(x)|$ 라고 정의해 보자. 그러면,

$$\dot{W} = \frac{2\dot{V}}{2\sqrt{2V}} \leq -g_0$$

임을 알 수 있고, 이 식은  $W(x(t))$ 가 (따라서  $V$ 와  $s$ 도) 유한시간 내에 0이 됨을 의미하며,  $x(t)$ 가 유한시간 내에 sliding surface에 도달함을 의미한다.

한편, 식  $s = x_1 + x_2$ 를 상태변수  $x_2$ 가 새로운 변수  $s$ 로 치환되는 좌표변환으로 생각한다면, 좌표변환된 시스템 (11)에 해당하는 differential inclusion은

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &\in \{-x_1 + s\} \\ \dot{s} &\in \begin{cases} \{x_2 + h(x) + g(x)(-\rho(x) - 1)\}, & s > 0 \\ \{x_2 + h(x) + g(x)u : \\ \quad -\rho(x) - 1 \leq u \leq \rho(x) + 1\}, & s = 0 \\ \{x_2 + h(x) + g(x)(\rho(x) + 1)\}, & s < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

와 같이 되며,  $s > 0$ 일 때  $\dot{s} < 0$ ,  $s < 0$ 일 때  $\dot{s} > 0$ 가 됨을 알 수 있으며,  $s = 0$ 일 때  $\dot{s}$ 가 속하는 집합에는 0이 포함되어 있음을 알 수 있다. 즉, Filippov 해는  $s(x(t))$ 가 유한시간 내에  $s(x(t)) = 0$ 이 되고 그 값을 유지함을 알려준다. 따라서 식 (12)을 충분히 작은 샘플링 주기  $\Delta$ 에 대해 구현한 슬라이딩 모드 제어기도 유사하게 동작할 것임을 알 수 있다.

## 6. 결론

본 편에서는 슬라이딩 모드 제어에 관한 이론 논문에서 자주 등장하는 Filippov의 해가 무엇이며 왜 필요한지에 대해 살펴보았다.

본 편의 내용 중 불연속인 우변을 가진 미분방정식에 흥미를 가진 독자라면 풍부한 예제와 함께 알기 쉽게 쓰여진 참고문헌 [4]를 추천한다. 또한, 슬라이딩 모드 제어에 관한 수학적 접근에 대해서는 [5], 좀더 실제적인 접근에 대해서는 [3, 6]을 추천한다.

### 부록: 절대연속 함수

절대연속(absolutely continuous) 함수의 정의는 다음과 같다 [4].

A function  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  is absolutely continuous if, for all  $\varepsilon > 0$ , there exists  $\delta > 0$  such that, for each finite collection  $\{(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)\}$  of disjoint open intervals contained in  $[a, b]$  with

$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$ , it follows that  $\sum_{i=1}^n |x(b_i) - x(a_i)| < \varepsilon$ .

위 정의와 동치인 명제는 어떤 Lebesgue integrable 함수  $\kappa : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 가 존재하여

$$x(t) = x(a) + \int_a^t \kappa(\tau) d\tau, \quad t \in [a, b]$$

를 만족하는 것이다. 또한, 절대연속인 함수  $x(t)$ 는 거의 모든(almost everywhere)  $t$ 에 대해 미분가능함이 알려져 있다.

절대연속성은 locally Lipschitz 성질보다 약한 개념이고 연속성보다 강한 개념이다. 예를 들어,  $x(t) = t \sin(1/t)$ 는 연속이나 절대연속이 아니고,  $x(t) = \sqrt{|t|}$ 는 절대연속이나 locally Lipschitz가 아니다. 한편, 미분가능성은 locally Lipschitz 성질보다 강한데,  $x(t) = |t|$ 는 locally Lipschitz이나 미분가능한 함수가 아니다.

### 참고

본 내용은 2011년 8월 17일에 서울대학교에서 열렸던 제어이론학교에서 강의한 내용을 바탕으로 작성하였으며 해당 강의의 동영상은 <http://lecture.cds1.kr>에서 구할 수 있다. 또한, 본 편의  $\text{\LaTeX}$  조판본은 제어이론 연구회 홈페이지에서 구할 수 있다.

### REFERENCES

- [1] H. Khalil, *Nonlinear Systems*, 3rd edition, Prentice Hall, 2002.
- [2] A.F. Filippov, *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*, Kluwer Academic Publishers, 1988.
- [3] C. Edwards and S. Spurgeon, *Sliding Mode Control: Theory and Applications*, Taylor & Francis, 1998
- [4] J. Cortes, "Discontinuous Dynamical Systems," *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 28, no. 3, pp. 36–73, 2008.
- [5] V.I. Utkin, *Sliding Modes in Control Optimization*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [6] B. Bandyopadhyay, F. Deepak, and K.S. Kim, *Sliding Mode Control using Novel Sliding Surfaces*, Springer, 2009.



**심형보** 교수는 2000년 서울대학교 전기공학부에서 박사학위를 받고 미국 산타 바바라 소재 캘리포니아주립대학에서 박사후 과정을 수료 후 현재 서울대학교에서 교수로 재직 중이다. *Automatica*, *IEEE Transactions on Automatic Control* 등 저널의 associate editor를 맡은 바 있다.