Sampling Zero란 무엇인가?

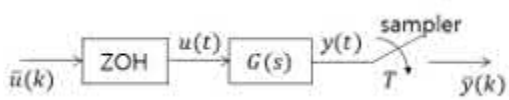
심형보 (서울대학교 전기정보공학부)

"최소위상 시스템을 이산화하면 비최소위상 시스템이 될 수도 있다고 하던데 그게 사실인가요?"

부끄럽지만 필자 역시 처음 이 질문을 들었을 때, 학부나 대학원 수업 때 들어본 적이 없는 내용인지라 무슨 말인지 알지 못했던 기억이 난다. 본 편을 통해 상대차수, 최소위상 시스템, intrinsic zero와 sampling zero에 대해서 공부한 후, 위 질문에 당당히 "그렇다"라고 대답해 보자.

1. 서론 : 다 아는 이야기

우리가 제어하고자 하는 대상이 되는 로봇, 자동차, 모터 등의 실제 시스템은 연속시간(continuous-time) 시스템이지만, 이를 컴퓨터로 제어하기 위해서 대상이 되는 연속시간 시스템의 출력 값을 이산시간(discrete-time)에서 sampling하고, 또한 컴퓨터로 계산된 이산시간 제어 명령을 ZOH (zero-order-hold)를 사용하여 연속시간 입력 값으로 변환한다는 것은 널리 알려져 있다. 이를 그림으로 표현하면 아래와 같이 되는데,



여기서, sampling 주기를 T라 하고, t는 연속시간 변수인 실수, k는 이산시간 변수인 정수라고 한다면,

$$\begin{aligned} \text{sampler:} \quad & \bar{y}[k] = y(kT) \\ \text{ZOH:} \quad & u(t) = \bar{u}[k], \quad kT \le t < (k+1)T \end{aligned}$$

가 성립함을 알 수 있다.

본 편에서는 간단한 선형시불변 단일입력-단일출력 시스템(LTI SISO system)만을 생각할 것이고 이 시스템이 $G(s)$라는 전달함수로 표현되었다고 하자. 또한, $G(s)$는

$$G(s) = \frac{g_n(s)}{g_d(s)} \tag{1}$$

와 같이 서로소(coprime)인 분자다항식 $g_n(s)$와 분모다항식 $g_d(s)$로 표기된다고 하고, $g_d(s)$는 시스템 차수인 n차 다항식이며 $g_n(s)$의 차수는 $g_d(s)$의 차수보다 작은 경우만 다루도록 한다. 이러한 시스템은 물론 상태변수 공간에서

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t) \tag{2}$$

와 같이 표기될 수 있으며, 이 때 행렬 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $C \in \mathbb{R}^{1\times n}$는 $G(s) = C(sI-A)^{-1}B$를 만족함을 쉽게 보일 수 있다.

이제 우리의 관심을 이산시간으로 돌려, 이산시간에서의 시스템 입력 $\bar{u}[k]$와 출력 $\bar{y}[k]$의 관계를 살펴보고자 한다. 이를 위한 간편한 방법은 이산시간 상태변수 $\bar{x}[k]$를 도입하는 것인데, 연속시간 상태변수 $x(t) \in \mathbb{R}^n$의 $t = kT$일 때 값을 $\bar{x}[k]$라 정의하자. 즉, $\bar{x}[k] = x(kT)$가 되는 셈인데, 시간 $t = t_0$에서 초기값 $x(t_0)$를 가지고 시작된 연속시간 시스템 (2)의 해 $x(t)$가

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

로 표현된다는 것을 상기해 보면, 이 식에 단순히 $t = (k+1)T$와 $t_0 = kT$를 대입하는 것만으로

$$\begin{aligned} \bar{x}[k+1] &= x((k+1)T) \\ &= e^{AT}x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ &= e^{AT}\bar{x}[k] + \left(\int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}Bd\tau\right)\bar{u}[k] \\ \bar{y}[k] &= y(kT) = Cx(kT) = C\bar{x}[k] \end{aligned}$$

를 유도할 수 있다. 윗 식을 조금만 예쁘게 적어본다고 하면,

$$\begin{aligned} &\bar{A} := e^{AT}, \quad \bar{C} := C, \\ &\bar{B} := \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}Bd\tau = \int_0^T e^{A\tau}d\tau B \end{aligned} \tag{3}$$

라고 정의된 행렬을 이용하여,

$$\bar{x}[k+1] = \bar{A}\bar{x}[k] + \bar{B}\bar{u}[k], \quad \bar{y}[k] = \bar{C}\bar{x}[k] \tag{4}$$

와 같이 쓰면 된다.

이 식 (4)가 바로 연속시간 시스템 (2)의 이산화된 discrete-time LTI SISO system의 표현형이 된다. 이 식의 유도과정에서 볼 수 있듯이 (4)는 (2)의 근사식이 아님을 기억해야 하고, 단순히 이산시간 $t = kT$에서 입력과 상태변수, 그리고 출력 간의 관계를 나타낸 식이라고 이해하면 된다.

1.1. 상대차수, 극점, 영점, 그리고 최소위상 시스템

이제 본격적인 논의를 위해 몇 가지 용어를 정의하려고 한다. 우선 연속시간 시스템 뿐 아니라 이산시간 시스템의 경우에도 전달함수를 정의할 수 있으며, 시스템 (4)의 전달함수는

$$\bar{G}(z) = \frac{\mathscr{Z}\{\bar{y}[k]\}}{\mathscr{Z}\{\bar{u}[k]\}} = \bar{C}(zI - \bar{A})^{-1}\bar{B}$$

와 같이 되는데, 여기서 $\mathscr{Z}\{\bar{u}[k]\} := \sum_{k=0}^{\infty} \bar{u}[k]z^{-k}$는 이산신호 $\bar{u}[k]$의 $\mathscr{Z}$-변환이라고 하며, 복소변수 z의 함수라고 할 수 있다.

전달함수에 대한 '상대차수(relative degree)'는 그 전달함수 분모다항식의 차수에서 분자다항식의 차수를 뺀 것으로 정의한다. 이 정의는 연속시간 전달함수 $G(s)$와 이산시간 전달함수 $\bar{G}(z)$ 모두에 적용된다. 한편, $G(s)$가 상대차수 r을 가지면 0 아닌 상수 K를 가지고 아래와 같이 일반적으로 표기할 수 있는데

$$K\frac{s^{n-r} + \bigcirc s^{n-r-1} + \cdots + \bigcirc}{s^n + \bigcirc s^{n-1} + \cdots + \bigcirc} = Ks^{-r} + \bigcirc s^{-r-1} + \bigcirc s^{-r-2} + \cdots$$

이 식이 의미하는 바는 입력 $u(t)$를 최소한 r번 적분해야 (즉, $1/s$를 r번 거쳐야) 비로소 출력 $y(t)$에 나타난다고 볼 수도 있다. 마찬가지로 ($z^{-1}\mathscr{Z}\{\bar{u}[k]\} = \mathscr{Z}\{\bar{u}[k-1]\}$이 성립하기 때문에) $\bar{G}(z)$의 상대차수가 r인 경우에는 윗식에서 s대신 z로 생각해 보아 입력 $\bar{u}[k]$는 최소한 r 스텝 뒤에야 출력 $\bar{y}[k]$에 나타난다고 이해할 수 있다.

한편, $G(s)$의 '극점(pole)'이란 식 (1)에서 $g_d(s)$의 근을 말하며 '영점(zero)'이란 $g_n(s)$의 근을 말한다. 마찬가지로 $\bar{G}(z)$의 극점과 영점도 동일하게 정의된다. 복소수 p가 연속시간 $G(s)$의 극점이라고 하면, $\bar{G}(z)$는 e^{pT}를 극점으로 갖는다는 것은 식 (3)을 포함한 앞의 논의에서 쉽게 알 수 있다. 다만, 복소수 q가 $G(s)$의 영점이라고 해서 e^{qT}가 $\bar{G}(z)$의 영점인 것은 아니며, 대신 샘플링 주기 T가 점점 작아질 때 $\bar{G}(z)$의 영점이 e^{qT}와 점점 유사해진다는 것은 알려져 있다.

'최소위상(minimum phase) 시스템'이란 연속시간 전달함수의 경우 모든 영점의 실수부가 음수일 때, 이산시간의 전달함수의 경우 모든 영점의 크기(magnitude)가 1보다 작을 때의 시스템으로 정의되어 있다. 해당 시스템이 최소위상이 아닐 때 '비최소위상(non-minimum phase) 시스템'이라 한다.

2. 본론 : 흥미로운 이야기

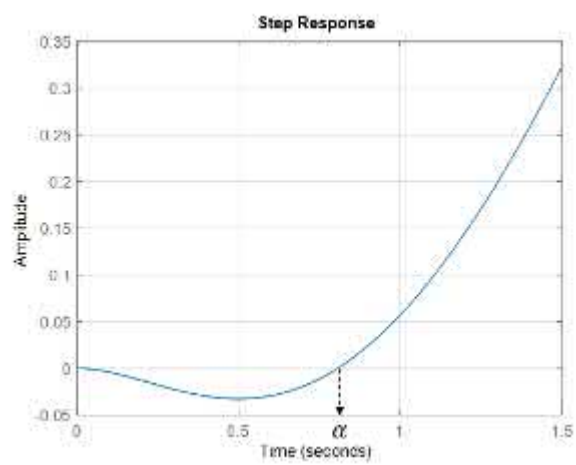
2.1. 이산화를 하면 상대차수가 변할까 안 변할까?

차수가 n인 연속시간 시스템 $G(s)$의 상대차수가 r ($1 \le r \le n$)이라고 하자. 이 시스템을 샘플링 주기 T로 이산화(discretization)를 하여 이산시간 시스템 $\bar{G}(z)$을 얻었다고 하면, $\bar{G}(z)$의 상대차수는 r과 같을까? 이 질문의 답은 연속시간 시스템 $G(s)$의 상대차수가 무엇이든지 이산시간 시스템 $\bar{G}(z)$의 상대차수는 거의 모든 경우에 1이 된다는 것이다!

왜 그럴까? 그리고 '거의 모든 경우'라고 한 이유는 또 무엇일까? 이 문제에 답하기 위해 예를 들어 다음과 같은 연속시간 시스템을 생각해 보자.

$$G(s) = \frac{-s+3}{s^3+3s^2+3s+1}$$

이 시스템은 3차 시스템이고 상대차수 $r = 2$를 가지고 있다. 이 시스템의 초기값이 0일 때 unit step 입력을 가하면 아래와 같은 출력(step response)을 얻게 된다.



이번에는 이 시스템을 샘플링 주기 T로 이산화한 시스템 $\bar{G}(z)$가 있다고 하고, 이 시스템의 이산시간 step response을 구해보자. 사실 이산시간 step response는 (계산 없이도) 위 그림에서 바로 알아낼 수 있는데, 그 이유는 이산시간 step input $\bar{u}[k] = 1$ ($k \ge 0$)을 인가하면 ZOH를 통해 연속시간 입력 $u(t) = 1$ ($t \ge 0$)이 만들어지고, 이 입력에 대한 출력을 그린 것이 바로 위 그림이기 때문이다. 즉, 위 그림에서 출력 신호를 T초 간격으로 샘플링하면 그것이 바로 $\bar{y}[k]$ 신호가 되는 것이다.

그런데 T가 α와 같지 않은 경우에는 $\bar{y}[0] = y(0) = 0$, $\bar{y}[1] = y(T) \neq 0$라는 것을 알 수 있는데, step input $\bar{u}[k]$에 대하여 한 스텝 뒤에 바로 0이 아닌 출력 $\bar{y}[1]$가 나왔다는 것의 의미는 (1.1절에서 살펴본 바와 같이) $\bar{G}(z)$의 상대차수가 1이라는 것이다. 즉, $G(s)$의 상대차수는 2이지만, $\bar{G}(z)$의 상대차수는 1이 되었다! 가만히 생각해 보면, 주어진 연속시간 시스템의 step 입력에 대한 출력은 0에 머물러 있지 않고 앞의 그림에서처럼 즉시 반응할 것이고, 따라서 0초 이후에는 무언가 0 아닌 출력이 나오기 시작할 것이다. 때문에 샘플링 주기 T가 아주 특수한 값, 예를 들어, 위 그림에서의 α와 같은 것이 아니라면 거의 모든 T에 대해 $\bar{G}(z)$는 상대차수 1을 가지게 된다는 것이다. 따라서 앞에서 말한 '거의 모든 경우'란 '거의 모든 샘플링 주기 T에 대해서'란 뜻이다. (위 그림에서의 경우에 $T = \alpha$라면, 이 때는 $\bar{y}[0] = \bar{y}[1] = 0$, $\bar{y}[2] \neq 0$이 되게 되므로 $\bar{G}(z)$의 상대차수는 2가 될 것이다.)

2.2. 상대차수가 줄었다면 새로운 영점이 생겼다?

앞에서 살펴본 예의 경우 연속시간 시스템 $G(s)$은 3차이고 상대차수가 2였기 때문에 한 개의 영점을 가지고 있었다. 이를 이산화한 $\bar{G}(z)$는 3차이면서 상대차수가 1이 되었다. 그렇다면 $\bar{G}(z)$의 영점은 두 개가 있다는 것인데 그 중 하나는 연속시간의 영점에서 온 것이라 예상할 수 있지만 나머지 하나는 뭘까? 바로 이 새로운 영점, 즉, 이산화 과정에서 새롭게 만들어진 이 영점을 'sampling zero'라고 부르는 것이다.

예를 통해 좀 더 살펴보고자 m-chain 적분기라 불릴 수 있는 연속시간 시스템

$$P(s) = \frac{1}{s^m}$$

을 생각해 보자. 이 시스템은 간단하기 때문에 unit step 입력에 대한 출력 $y(t)$는 단순히 step 입력을 m번 적분한 $y(t) = t^m/m!$임을 쉽게 알 수 있고, 이를 T초 간격으로 샘플링하면 이 시스템을 이산화한 $\bar{P}(z)$에 이산시간 step 입력을 인가했을 때의 출력 $\bar{y}[k]$도

$$\bar{y}[k] = y(kT) = \frac{T^m}{m!}k^m$$

와 같이 쉽게 구할 수 있다. 또한, unit step 신호의 $\mathscr{Z}$-변환이 $1/(1-z^{-1})$임을 상기할 때

$$\bar{P}(z) = \frac{\mathscr{Z}\{\bar{y}[k]\}}{\mathscr{Z}\{\bar{u}[k]\}} = (1-z^{-1})\frac{T^m}{m!}\mathscr{Z}\{k^m\}$$

라는 사실을 얻을 수 있다. 여기서 $\mathscr{Z}\{k^m\}$은 다음 Lemma로부터 구할 수 있다.

Lemma 1: With discrete time index k and given positive integer m,

$$\mathscr{Z}\{k^m\} = \frac{\gamma_{m-1}(z)}{(1-z^{-1})(z-1)^m}$$

where $\gamma_m(z)$ is the *Euler-Frobenius polynomial* defined by

$$\gamma_m(z) = \beta_m^m z^m + \beta_{m-1}^m z^{m-1} + \cdots + \beta_1^m z + \beta_0^m$$

with

$$\beta_i^m = \sum_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}(j+1)^{m+1}\binom{m+2}{i-j}.$$

참고로 Euler-Frobenius 다항식의 예를 들어보면

$$\begin{aligned}\gamma_1(z) &= z+1\\ \gamma_2(z) &= z^2+4z+1\\ \gamma_3(z) &= z^3+11z^2+11z+1\end{aligned}$$

와 같은데, 이로부터 모든 자연수 m에 대해 $\gamma_m(z^*) = 0$이면 $\gamma_m(1/z^*) = 0$이 성립함을 알 수 있다. 즉, z^*가 근이라면 $1/z^*$도 근이란 말이된다.

결론적으로 m-chain 적분기 $G(s) = 1/s^m$을 이산화하면, $\bar{G}(z) = T^m\gamma_{m-1}(z)/(z-1)^m$이 되어 $z = 1$에 m개의 극점을 가지는 이산시간 시스템이 되었다. 또한, 연속시간에서는 영점이 하나도 없었는데, 이산시간에서는 $m-1$개의 sampling zero를 가지는 상대차수 1을 갖는 시스템이 되었음을 확인 할 수 있다.

2.3. 샘플링 영점의 위치까지 예측할 수 있다고?

앞에서 살펴본 m-chain 적분기의 경우 어떤 샘플링 주기 T로 샘플링하든 새롭게 생긴 sampling zero의 위치는 언제나 $m-1$차 Euler-Frobenius 다항식의 근으로 주어졌다. 그런데, 일반적인 연속시간 시스템 $G(s)$를 이산화한 $\bar{G}(z)$의 영점의 위치도 쉽게 예측이 가능할까? 물론 $G(s)$가 주어지면 Matlab 등의 연산 도구를 사용하여 $\bar{G}(z)$를 구한 뒤 영점을 계산해 내는 것도 가능할 것이지만, 본 절에서는 T가 매우 작을 때 대략적으로 $\bar{G}(z)$의 영점을 구할 수 있음을 [2]에서 인용된 다음 정리를 통해 알아보고자 한다.

Theorem 1: For any $G(s)$ that has relative degree r,

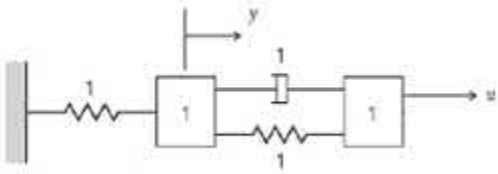
$$\lim_{T\to 0}\frac{\bar{G}(z)}{T^r} = \frac{K}{r!}\frac{\gamma_{r-1}(z)(z-1)^{n-r}}{(z-1)^n}$$

where K is a constant defined by $K = \lim_{s\to\infty} s^r G(s)$.

윗 식을 적절히 해석해 보면, 우선 좌변에서 T^r로 나눈 뒤 $T \to 0$을 해도 무한대로 발산하지 않는다는 것으로부터 $\bar{G}(z)$는 샘플링 주기 T가 점점 작아질 때 $\bar{G}(z)$ 역시

T^r 정도의 크기로 작아지고 있음을 알 수 있는데 이는 앞 절의 m-chain 적분기의 경우에서도 확인할 수 있다. 한편, 우변에서 $(z-1)^{n-r}$항은 분자와 분모에서 약분될 수 있지만 굳이 그대로 두었다. 때문에 이 식을 다음과 같이 해석할 수 있겠다. 우선, 이산시간 시스템이 가진 n개의 극점은 $T \to 0$에 따라 모두 1로 수렴해 간다. 이는 $\bar{G}(z)$의 극점은 $G(s)$의 n개의 극점 p_i로부터 각각 $e^{p_i T}$로 주어짐을 알기 때문에 자명한 결론이다. 한편, $G(s)$의 $n-r$개의 영점 q_i은 이산화에 따라 $\bar{G}(z)$의 $n-r$개의 영점을 만들게 되며, 이들 $\bar{G}(z)$의 영점들은 $T \to 0$에 따라 $e^{q_i T}$와 유사한 값을 갖는다는 것이 알려져 있기 때문에 이들 모두 1로 수렴하는 것은 당연한 결과이다. 이와 같은 $\bar{G}(z)$의 $n-r$개 영점들을 (sampling zero와 대비하여) 'intrinsic zero'라고 부른다. 마지막으로, Theorem 1의 우변으로부터 $T \to 0$일 때 $\bar{G}(z)$는 추가적인 $r-1$개의 영점, 즉, sampling zero를 갖는데, 이들은 모두 $r-1$차 Euler-Frobenius 다항식의 근으로 수렴해 간다는 사실을 알게 된다. 생각해 보면, 위 정리는 모든 $G(s)$에 대해 성립하므로 어떤 시스템이든지 샘플링 주기 T가 작아진다면 위 성질을 피할 수 없다.

다시 한번 예를 들어 보자.



위 그림은 모든 물리량을 1로 간략화한 two-mass-spring-damper 시스템이다. 이 시스템의 연속시간 전달함수는

$$G(s) = \frac{s+1}{(s^2+1)(s^2+s+1)+(s+1)s^2}$$

와 같이 구할 수 있고, 샘플링 주기가 $T = 0.1$초일때 Matlab을 통해 이산시간 전달함수를 구하면

$$\bar{G}(z) = 10^{-4} \times \frac{1.6z^3 + 4.8z^2 - 4.2z - 1.4}{z^4 - 3.8z^3 + 5.4z^2 - 3.4z + 0.8}$$

이 된다. 역시나 4차 시스템 $G(s)$의 상대차수가 3임에도 $\bar{G}(z)$는 상대차수 1을 갖고 있다. 이제 $\bar{G}(z)$의 영점을 계산해 보면,

$$0.90, \quad -0.26, \quad -3.63$$

을 가짐을 알 수 있다. 이 중 첫번째 영점은 $G(s)$의 영점인 -1부터 얻어진 intrinsic zero로 $T \to 0$일 때 1로 수렴하는 성질을 가지고 있음을 유추해 볼 수 있다. 한편, $\bar{G}(z)$는 2개의 sampling zero를 가지게 되는데 이들은 $T \to 0$일 때 $\gamma_2(z) = z^2 + 4z + 1 = 0$의 두 근 -0.268과 -3.732로 수렴한다는 것도 유추해 볼 수 있다. 또한, $T \to 0$에 따라 $\bar{G}(z)$의 숫자 10^{-4}도 점점 더 작아질 것이다.

2.4. 그래서 최소위상 시스템을 이산화하면 비최소위상 시스템이 될 수도 있는 거구나!

Euler-Frobenius 다항식은 그 근이 항상 음의 실수이고 중근이 발생하지 않는다는 것이 알려져 있다 [3]. 또한 앞 절에서 z^*이 근이라면 $1/z^*$도 근이 됨을 이야기한 적이 있다. 이 말은, 한 근이 복수평면의 단위 원(unit circle) 내부에 위치하면 다른 하나는 반드시 unit circle 바깥에 위치해야만 한다는 것을 뜻한다. 그렇기 때문에 2차 이상의 Euler-Frobenius 다항식은 언제나 한 개 이상의 근이 unit circle 바깥에 놓일 수 밖에 없고, 따라서 연속시간 시스템의 상대차수가 $r = 3$ 이상일 경우, Theorem 1의 결과에 따라 샘플링 주기 T가 충분히 작을 때 $\bar{G}(z)$는 불안정한 영점을 가질 수 밖에 없게 된다. 이 성질은 $G(s)$가 무엇이든지 항상 발생하는 상황이기 때문에 비록 $G(s)$가 최소위상 시스템이라 하더라도 $\bar{G}(z)$는 비최소위상 시스템이 될 수 있는 것이다.

3. 결론 : 뒷 이야기

3.1. Sampling zero에 관한 또다른 해석

지금까지는 sampling zero를 수리적 분석을 통해 설명해 보았지만 사실 영점(zero)이란, 소위 zero dynamics라는 것이 선형일 때, 그 시스템 행렬의 고유치(eigenvalue)로 정의된 것이다. 이런 해석을 따라간다면 왜 이산화를 통해 새로운 영점이 생길 수 있는 지를 직관적으로 이해할 수도 있다. 우선 어떤 연속시간 시스템의 출력 $y(t)$가 0으로 유지되고 있는 상황을 상상해 보자. 이를 위해서는 모든 시간 $t \geq 0$ 동안 $Cx(t) = 0$이어야 하는데, 상태변수 $x(t)$가 행렬 C의 null space에서 시작해서 계속 그곳에 머물러 있어야 한다는 뜻이다. 물론 $x(t)$는 입력 $u(t)$로부터 영향을 받기 때문에 이 상황을 상상하기 위해서는 입력 $u(t)$도 $x(t)$가 C의 null space에 머무르도록 잘 선정되었다고 생각하자. 따라서 $u(t)$는 $x(t)$의 함수로 주어지며, 선형시스템의 경우 이 상황을 만드는 입력 $u(t)$를 언제나 찾을 수 있다. 이 상황에서 $x(t)$의 움직임은 어떤 미분방정식의 지배를 받게 되는데, 그 미분방정식을 zero dynamics라고 부른다. 한편 zero dynamics의 차수는 $n-r$, 즉, 시스템 차수와 상대차수의 차이로 주어지게 된다. 예를 들어,

$$y = x_1, \quad \dot{x}_1 = x_2 + u, \quad \dot{x}_2 = x_1 + u$$

라고 하면, $y(t) = x_1(t) = 0$을 이루기 위해서 $x_2(0)$은 아무 값을 가져도 상관없지만 $x_1(0) = 0$이어야 하고 $u(t) = -x_2(t)$이어야만 한다. 이 경우, $\dot{x}_1(t) = 0$가 유지되어 출력에서는 아무 것도 보이지 않는다. 이 경우에도 시스템

내부에서 움직이는 동역학이 있는데 그것이 바로 $\dot{x}_2(t) = x_1(t) + u(t) = 0 - x_2(t)$인 셈이고, 이 동역학 $\dot{x}_2 = -x_2$를 zero dynamics라 부르며, 이 zero dynamics의 시스템 행렬의 고유치 -1이 곧 위에서 본 2차 시스템의 영점이 되는 것이다. (실제로 2차 전달함수를 구하여 점검해 보아도 좋다.)

그런데 이산화를 하면 왜 새로운 sampling zero가 추가적으로 생길 수 있는 것일까? 이산시간 시스템의 $\bar{y}[k]$는 사실 연속시간 출력 $y(t) = Cx(t)$를 $t = kT$에서, 즉, 매 T초마다 뜨문뜨문 보는 것이기 때문에 $\bar{y}[k] = 0$을 유지하기 위해서는 시스템의 상태변수 $x(t)$가 C의 null space에서 계속해서 머무르지 않고 중간중간에 C의 null space를 빠져나왔다가 $t = kT$일때만 되돌아가도 된다. 즉, C의 null space에서 나왔다 되돌아가게 하는 입력 $\bar{u}[k]$가 있다면 이것도 하나의 새로운 이산시간 zero dynamics를 만들어 줄 수 있게 되며, 결과적으로 이산시간 zero dynamics는 연속시간 zero dynamics보다 더 많은 차수를 가질 수 있게 되는 것이다. 샘플링 주기 T가 매우 작아질 경우 이산시간 시스템의 거동은 연속시간 시스템과 비슷해 질 것이다. 그렇다면 연속시간 시스템에서 출력을 0으로 유지하게 했던 입력 $u(t)$와 유사한 $\bar{u}[k]$ 역시 이산시간 시스템의 출력을 0으로 유지하게 할 수 있을 것이며, 이러한 입력에 의해 연속시간 영점 q_i으로부터 야기된 이산시간 시스템의 영점은 $e^{q_i T}$의 값과 유사할 수 있게 된다. 한편, T가 매우 작더라도 $x(t)$를 C의 null space에서 나왔다 되돌아가게 하는 입력은 주로 매 샘플링 구간마다 교번(alternating)하는 입력이 될 것이고, 이 입력에 의한 영점이 sampling zero라고 이해하면 된다. 교번하는 이산시간 시스템의 고유치는 음의 실수임을 상기할 때, 이 사실은 Euler-Frobenius 다항식의 근이 항상 음수로 주어진다는 사실과도 일맥상통하는 면이 있다.

3.2. 비최소위상 시스템

불안정한 영점을 가진 비최소위상 시스템은 제어하는 사람들에게는 언제나 골치덩어리이다. 주어진 시스템이 비최소위상일 경우, 고이득 궤환 제어기(high-gain feedback control)를 사용할 때 쉽게 폐루프 시스템(closed-loop system)이 불안정해지기도 하고, 제어 성능 향상에 제약이 있다는 것이 알려져 있으며, 극점-영점 소거(pole-zero cancellation)에 의한 쉬운 제어기 설계가 불가능하고, 해당 시스템의 역동력학(inverse dynamics)이 불안정하기 때문에 임의의 reference 신호를 시스템 출력이 점근적으로 따라가게 하는 것이 어려워지고, 나쁜 의도를 가진 사람들이 제어 시스템을 몰래 파괴하는 것이 이론적으로 가능해지기도 한다 [5]. 그렇기 때문에 연속시간에서 최소위상을 가지는 시스템이라 하더라도 이산시간에서 비최소위상 시스템이 될 수 있다는 사실은 그다지 좋은 소식은 아니지만, 그나마 intrinsic zero는 모두 안정하고 sampling zero만 불안정한 경우에는 제어기법을 적절히 설계함으로 극복하는 경우 [4]가 발생하기도 한다.

참고

본 편의 전체 내용은 현재 KIST에서 근무 중인 박경훈 박사의 2015년도 세미나 발표자료를 참고하였다. 특히 2.1절의 설명은 박경훈 박사의 아이디어를 그대로 정리한 것이다. 한편, Lemma 1과 Theorem 1의 증명이 포함된 본 편의 LaTeX조판본은 제어이론연구회 홈페이지에서 구할 수 있다.

REFERENCES

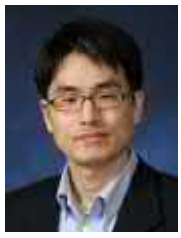
[1] K. J. Åström, P. Hagander, J. Sternby, "Zeros of sampled systems," *Automatica*, 1984.

[2] J. Yuz and G. C. Goodwin, *Sampled-data Models for Linear and Nonlinear Systems*, Springer, 2014.

[3] S. R. Weller, W. Moran, B. Ninness, and A. D. Pollington, "Sampling zeros and the Euler-Frobenius polynomials," *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2001.

[4] G. Park, C. Lee, Y. Joo, and H. Shim, "Robust stability of discrete-time disturbance observers: Understanding interplay of sampling, model uncertainty and discrete-time designs," `arXiv:1901.08722`, 2019.

[5] J. Back, J. Kim, C. Lee, G. Park, and H. Shim, "Enhancement of security against zero dynamics attack via generalized hold," in Proc. of *IEEE Conf. on Decision and Control*, 2017.



심형보 교수는 2000년 서울대학교 전기공학부에서 박사학위를 받고 미국 산타바바라 소재 캘리포니아 주립대학에서 박사후 과정을 수료 후 현재 서울대학교에서 교수로 재직 중이다. Automatica, IEEE Transactions on Automatic Control 등 저널의 associate editor를 맡은 바 있다.